T A M P E R E E N Y L I O P I S T O

Murtolukumatematiikkaa kielentäen

Kasvatustieteiden tiedekunta
Kasvatustieteiden pro gradu -tutkielma
HANNA-KAISA NIKUNEN
Maaliskuu 2018

Tampereen yliopisto
Kasvatustieteiden tiedekunta
HANNA-KAISA NIKUNEN: Murtolukumatematiikkaa kielentäen
Kasvatustieteiden pro gradu -tutkielma, 78 sivua, 29 liitesivua
Maaliskuu 2018

Tutkimuksen tarkoituksena oli valmistaa opetusmateriaalina murtolukutehtäväpaketti viidesluokkalaisille koululaisille ja samalla kartoittaa, miten oppilaat hallitsevat murtolukulaskemista ja murtolukuihin liittyviä käsitteitä. Tarkoituksena oli myös selvittää, Oppilaiden oppimisen muutosta verrattiin alkutilanteeseen ja opetusmateriaalin jälkeiseen aikaan.

Tutkimus, joka tehtiin, oli luonteeltaan kvalitatiivinen ja teoreettisena viitekehyksenä viitattiin murtolukuihin ja matematiikan kolmeen kieleen. Tutkimusta analysoitiin sisällönanalyysin avulla ja aineistoa kerättiin triangulaatiota hyödyntämällä, jotta tutkimuksen vakuuttavuutta voitiin parantaa.

Valmistetun opetusmateriaalin pääpaino oli kielentämisen käyttämisessä oppimisprosessissa ja oppimisen kohteena olivat murtoluvut. Sen oli tarkoitus innostaa oppilaita kielentämään murtolukulaskuja. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2014) vaikuttivat taustalla. Pyrittiin siis herättämään oppilaissa kiinnostusta murtolukulaskuja kohtaan erilaisin lähestymistavoin ja varmentaa ja laajentaa oppilaiden murtolukukäsitettä.

Kenttätutkimuksen jälkeen saatujen palautteiden perusteella tehtiin vielä korjauksia ja muutoksia opetusmateriaaliin, minkä jälkeen tehtävät testattiin vielä toisella ryhmällä viidesluokkalaisia. Jälkimmäinen testiryhmä antoi vielä palautteensa opetusmateriaalista. Koska kyseessä on kehittämistutkimus, oppimateriaalia paranneltiin ja tehtäväpaketti sai lopullisen muotonsa vasta pro gradu -työn valmistumisvaiheessa.

Toisen testiryhmän luokanopettaja antoi oman palautteensa oppimateriaalin vaikutuksista oppilaiden matematiikan opiskelussa. Opettaja havainnoi oppimateriaalin käyttöä tunnilla ja oppimisen tulosta myöhemmin matematiikan tunneilla. Myös tutkijan havainnot näkyvät lopullisessa oppimateriaalissa.

Tuloksista nousee esille se, että viidesluokkalaiset ovat vahvasti orientoituneet matematiikan opiskelussa kirjan täyttämiseen. Haasteellisemmat tehtävät pohtimisten ja sanallisen tuotoksen kera, eivät ole niitä asioita, joita liiemmälti kaivataan.

Seuraavaksi tällaista tutkimusta voisi jatkaa teettämällä tehtäviä vielä useammalla testiryhmällä. Oppilaiden mielipiteiden muovautuminen on myös pitkän aikajanan tapahtuma, joten pitempääkin seurantaa voisi käyttää. Mielenkiintoista voisi olla myös selvittää, miten kielentäminen vaikuttaa vieraskielisten oppilaiden oppimisessa. Onko kielentäminen haaste vai kenties mahdollisuus?

Avainsanat: murtoluku, kielentäminen, matematiikka, perusopetus

SISÄLLYS

1 JOHDANTO

1.1 Murtolukujen problematiikkaa

Ajattelemme rationaalilukuja, joita murtoluvutkin ovat, tietynlaisten yhtälöiden ratkaisuina. Rationaaliluvuilla on monia tärkeitä ominaisuuksia lukujoukkona. Ne muun muassa muodostavat järjestetyn kentän, joka on suljettu joukko, ja jossa on voimassa yhteen- ja kertolasku. (Swan 2001, 150.) Koska murtoluvut ovat laaja kokonaisuus ja niiden vaikutus näkyy matematiikan kentässä monessa tilanteessa, niiden oppiminen on tärkeää. Murtolukujen hallintaa tarvitaan jopa tilastojen ja taulukoiden lukemisessa esimerkiksi maantiedon tunneilla.

Murtolukujen oppiminen oli hankala vaihe omassa kouluiässäni. Erityisesti kaksikielisyys ja sanasto loivat hataran pohjan ymmärtämiselle. Vasta aikuisiässä murtolukuproblematiikka alkoi muuttua selkeämmäksi. Murtoluvuilla oli muutakin merkitystä kuin mekaanisten laskujen vastausten kirjoittaminen. Luokanopettajaopintojeni tärkeänä tehtävänä on mielestäni opetella hallitsemaan niitä asioita, joita sitten aikanani opetan oppilaille. Mikäli oma ymmärrys puuttuu, myös tulevat oppilaani saattavat jäädä samalle tasolle, jolle itsekin jäin alakoulussa. Kirja täytetään ymmärtämättä, mistä on kyse.

Kielentämistä matematiikan opiskelussa ovat tutkineet muun muassa pro gradu -tutkimuksessaan Eveliina Laineenoja 2014 (Maahanmuuttajaoppilaan matematiikan kielentäminen: suullisen kielentämisen haasteet ja hyödyt) ja Henrik Katto & Mira Leppilahti 2016 (Kielentäminen pedagogisena mallina – Neljän kielen yhdistäminen storytelling-menetelmän keinoin), jotka selvittivät myös sitä, miten storytelling-menetelmä toimisi matematiikan opiskelussa. Storytelling-menetelmässä kerrotaan tarinoita ja yhdistetään niitä opetettavaan aiheeseen. Se ei ole menetelmä, joka korvaisi olemassa olevat toimintatavat, mutta on yhtenä metodina muiden opetusmenetelmien lisänä. (Hytti & Joutsenlahti 2006, 7.)

Opettajankoulutuslaitoksen Sanan lasku –projekti (Hämeenlinna 2008) lähestyi äidinkielen ja matematiikan opetusta molempien oppiaineiden vahvuuksista käsin. Matematiikan kielentäminen vaati suullista osallistumista. Äidinkielen pikkutietojen mekaaninen opiskelu nähtiin toki tärkeänä, mutta sen ei nähty olevan äidinkielen hallinnan merkittävin mittari. Sanan lasku –projektissa oppilaille tarjottiin ongelmaratkaisutehtäviä, joiden ratkaisemisessa käytettiin kielentämistä.

Äidinkielen puolella mietittiin, miten kielioppia voitaisiin opiskella ongelmanratkaisupohjaisesti. (Joutsenlahti & Kulju 2010, 53–59.)

1.2 Strukturoidusta oppimateriaalista joustavampaan?

Heinonen viittaa Mikkilän (1992) tutkimustuloksiin, joissa on huomattu, että usein oppimateriaalien työkirjat sisältävät tehtäviä, joiden tarkoituksena on siirrättää oppilailla tekstikirjan faktoja työkirjaan. Perustelutehtäviä on vähän tai ei lainkaan. Tällaiset työkirjan täyttämisen menetelmät ovat tyypillisiä opettajajohtoisen opetuksen malleja. Vaikka nykyisin on pyritty yksilöllisempään ja oppilaskeskeisempään opetukseen, monet opettajat edelleen arvostavat opettajakeskeistä opetusmenetelmää. (Heinonen 2005, 32, 39.)

Konstruktivistinen opettamiskäsitys tukee oppilaan vaiheittaista oppimista. Oppimateriaaleille luodaankin paineita vastata tätä ajattelutapaa. (Tynjälä 1999, 60.) Tutkimuksissa on huomattu, että oppilaat, jotka säännöllisesti saivat tehtäväkseen ongelma-ratkaisutehtäviä, paransivat menestystään niiden parissa. Myös oppilaiden työskentely muuttui myönteisemmäksi. Ongelmaratkaisutehtäviä tehdessään oppilaan ajattelu ja luovuus kehittyvät. Matematiikan opetuksessa avoimet ongelmatehtävät voivat tehostaa perinteistä matematiikan opiskelua. (Ahtee ym. 2015, 4–5.) Ongelmaratkaisutehtäviä voidaan siis pitää hyödyllisenä lisänä matematiikan opiskelussa. Helsingin yliopiston tutkimus toi lisämateriaalia perinteisen opetuksen oheen, koska huomattiin, että siitä olisi hyötyä. Voidaan ajatella myös käänteisesti, että perinteiset matematiikan oppimateriaalit eivät sisällä tarpeeksi ongelmatehtäviä.

Hannele Ikäheimo ja Eija Voutilainen tuottivat murtolukujen oppimateriaalin (2009), jossa havainnollisesti ja erilaisin välinein lähestyttiin murtolukulaskemista. Ikäheimo kirjoittaa tehtäväkirjan johdannossa, että kaikki ikäluokat hyötyvät konkretiasta, eli välineillä laskemisesta. Kirjan harjoitukset muistuttavat monelta kohtaa perinteistä oppikirjaa, mutta tehtävänanto ja välineet poikkeavat. Lähestymistapa on tekemällä oppiminen. (Ikäheimo & Voutilainen 2009, 4.)

Tutkimukseni koostuu matematiikan murtolukujen opetusmateriaalista ja kahdesta eri laadullisesta analyysistä, joissa viidesluokkalaiset oppilaat ovat käyttäneet materiaalia ja antaneet palautetta. Tutkimusaineiston kerääminen ja analysointi ovat nivoutuneet toisiinsa (Metsämuuronen 2008, 46). Tutkimuskohteet ovat olleet varsin suppeita (n. 20 henkilöä). Suurinta osaa saamastani materiaalista pystyin kuitenkin hyödyntämään pro gradu –työssäni.

Murtolukuharjoitusten innoittajana oli 1980-luvulta oleva israelilainen alakoulun matematiikan kirjasarja. Kirja rakentuu teorian ja harjoitusten vuorovaikutukselle. Kirjasarjassa opettajan roolia pitävä Dani ohjaa lapsia matematiikan ajattelussa ja uutta tietoa tuotetaan vanhan opitun päälle.

Konstruktivistinen ajattelutapa on vahvasti esillä.

Dani: Kokonaisluvut ovat lukuja, jotka jokainen lapsi oppii, kun hän alkaa puhua: kuten 1,2,3,4,5,6...

Limor: Tämän perusteella ½ ei ole kokonaisluku.

Dror: Eli, kaikki kokonaisluvut ovat kokonaisia lukuja.

(Rainer 1980-luvulla.)

Ihmistieteiden tavoitteena on – ennen selittämistä ja ennustamista – ymmärtäminen. Sen takia ihmistieteissä käytetään ymmärtäviä tai tulkitsevia menetelmiä. Tarkoituksena on siten ymmärtää tutkimuskohdetta. Se tapahtuu helpoiten niin, että inhimillinen toimija tai yhteisö on tutkinnan kohteena sen omasta näkökulmasta. Huomioon otetaan tällöin toiminnan perusteet ja toimijan oma näkökulma. (Raatikainen 2005, 2,6.) Tulosten selittäminen voi tapahtua huomioimalla toimijan uskomuksia tai toiveita. Selitykset eivät ihmistutkimuksessa sen takia voi olla kovinkaan yleisiä lakeja noudattavia, koska tapahtumat voivat olla ainutkertaisiakin. (Raatikainen 2005, 17.) Ennustaminen siitä, mitä tutkimustuloksia voidaan saada, on ihmistieteissä periaatteessa mahdotonta. Vain yksinkertaista ja eristettyä järjestelmää voidaan jollain tapaa ennustaa. Muutoin teorian testaaminen on joskus mahdollista. Säännönmukaisuuksia ja lainalaisuuksia voidaan ainakin ajoittain etsiä. (Raatikainen 2005, 11–12.)

Murtolukutehtävät pyrkivät täyttämään sitä tarvetta, johon uusi opetussuunnitelma ohjaa. Pyrkimyksenä tutkimuksessa on ollut tuottaa sellaista materiaalia, joka vastaisi juuri tämän hetken tarvetta, kun opetetaan murtolukuja viidennellä luokalla. Monelle opettajalle tilanne voi olla tuttu. Osa oppilaista hallitsee hyvin murtolukutehtävät edelliseltä vuodelta, mutta osalle oppilaista murtolukuharjoitukset tulevat kuin uusina asioina ja nopea ja selkeä kertaus voi jäädä. Oppilas jää tällöin ulkopuolelle, kun aiheen omaksuneet oppilaat pääsevät etenemään murtolukujen maailmassa ja oma käsitys murtoluvuista on aivan hukassa.

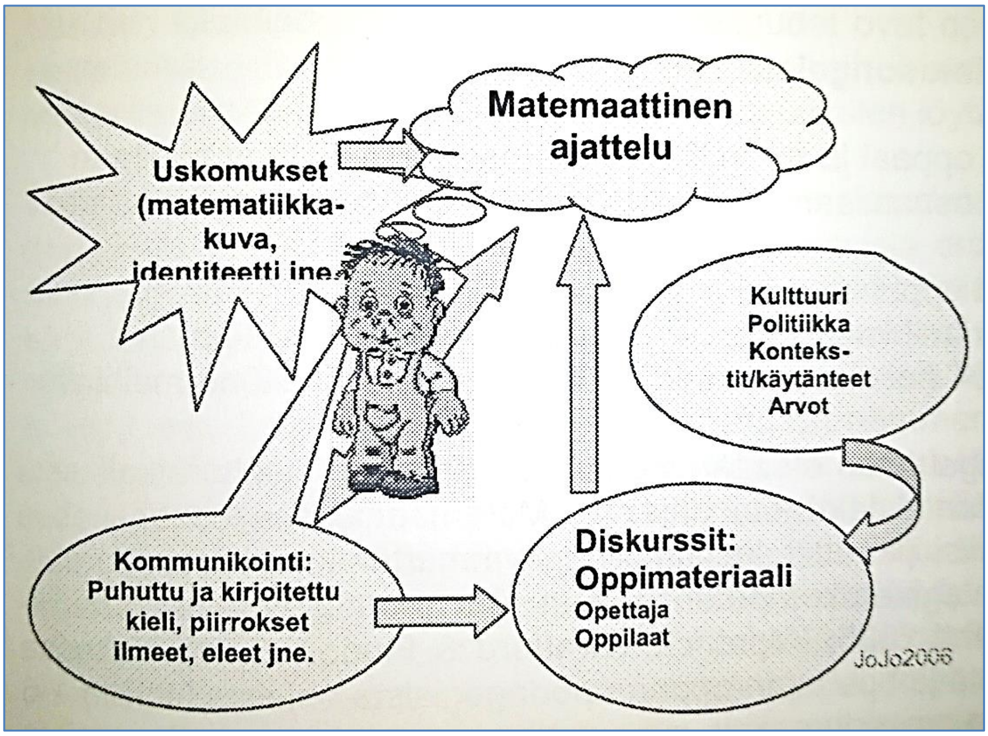
On tilanteita, jolloin mietitään yksittäisten oppilaiden kohdalla, että hallitseeko hän jo jonkin taidon. Koulumaailmassa opettaja havainnoi kaiken aikaa oppilaitaan ja heidän ratkaisutaitojaan eri tilanteissa. Arviointitilanteessa opettaja joutuu tekemään arvion ja erityisesti oppilas, jonka kohdalla pohditaan tukitoimia, tulee tulosten olla varmoja. Oppilaalla on toki oikeus saada opetusta, jonka avulla oppivat, mutta arviointitavoissa pitää olla huolellinen. (Hautamäki & Kuusela 1998, 143.)

Ajattelen, että lapsen tekemä oivallus on hänen omaa tuotostaan ja se on myös sitoutunut hänen oman historiaansa ja elämäänsä, joten hän pystyy oivallustaan hyödyntämään myöhemminkin. Toisen oppilaan keksimä oivallus ei välttämättä tuota samaa oppimista.

Matematiikan testisuorituksiin on todettu vaikuttavan verbaaliset ja spatiaaliset kyvyt. Näitä kykyjä oppilas voi hyödyntää esimerkiksi geometrian tehtävissä tuottamalla omaa graafista kuvaa tulkintojen lisäksi. Tutkimuksissa selvitettiin, miten verbaaliset taidot ja spatiaaliset kyvyt korreloivat erilaisissa tehtävissä. (Hannula ym. 1998, 202.) Tällaisetkin tutkimukset antavat viitettä siihen, että useammalla tavalla tuotetut vastaukset antavat laajempaa kuvaa oppilaan tiedonhallinnasta ja osaamisesta.

Oppimateriaali

Oppimateriaali on väline, joka sisältää oppiainesta opetustarkoituksiin. Oppimateriaalit ovat osa Suomen koulujärjestelmää, vaikka ne ovatkin kustantajien kaupallista toimintaa. Oppimateriaalit pohjautuvat opetussuunnitelmiin ja opetussuunnitelmien perusteisiin. Ne edustavat aina jotakin opetusmenetelmää ja ne kohdennetaan tietylle ikäkaudelle. Oppimateriaalit kohtaavat paljon kritiikkiä, koska käyttäjillä on toiveita ja odotuksia. Niiden tulisi heijastaa yhteiskunnan arvoja, mutta olla samaan aikaan moderneja ja herättää oppilaissa tunteita. Oppimateriaalien tärkein tehtävä on opettajien opetustyön tukeminen ja oppilaiden oppimaan auttaminen. (Heinonen 2005, 29–31.)



KUVIO 1. Oppilaan matemaattiseen ajatteluun vaikuttavia tekijöitä. (Joutsenlahti 2006, 5)

Joutsenlahden malli osoittaa, miten moni asia vaikuttaa oppilaan matemaattisen ajattelun kehittymiseen ja muodostumiseen. Oppilas on monen eri vaikutuksen piirissä. Matemaattista ajattelua voidaan nähdä jatkuvana prosessina, jossa oppilas on eri metakognitioiden ohjaama. (Hytti & Joutsenlahti 2006, 5.)

2 MATEMAATTISTA AJATTELUA ETSIMÄSSÄ

2.1 Ymmärtämisen tärkeys matematiikassa

Matemaattinen lukutaito ja läpi elämän jatkuva opiskelu ovat nykypäivän edellytyksiä hyvälle työntekijälle monella alalla. Vaatimuksina ovat myös viestinnän mutkikkuuden ymmärtäminen, teknologian hallinta, kysymysten esittämisen taito ja outojenkin tietojen analysointitaito. Ryhmätyötaidot ovat jo perustaitovaatimus. Laaja koulutus työntekijöiden parissa on yritykselle valttia, kun olosuhteet muuttuvat nopeasti. Matematiikan merkitys on edelleen kasvussa ja matematiikkaa myös sovelletaan vaihtuviin tilanteisiin. Hyvä matemaattinen osaaminen tukee myös muita nykyaikana tarvittavia taitoja. (Haapasalo 1998, 82.)

Matematiikan opetuksen peruselementti tulisi olla ongelmaratkaisukeskeistä, jossa korostetaan laajaa ja rikasta lähestymistapaa. Se, että oppilaat jakavat ideansa ja lähestymistapansa toisten oppilaiden kanssa ja esittävät ongelmia useilla eri tavoilla ja etsivät yhä uusia ratkaisumalleja, on vain yksi osa oppimista. Tärkeä osa on myös arvostaa ratkaisuprosessia itseään eikä vain lopputulosta. Liikkeelle lähdetään luonnollisista ongelmatilanteista, jotta oppilaiden on helpompi samaistua tilanteisiin. Opettaminen on tämän kaltaisessa oppimistavassa eräänlainen prosessi, joka auttaa pureskelemaan vaikeimpia tilanteita. Pikku hiljaa oppilas laajentaa matemaattista kieltään ja kehittää eri ratkaisustrategioita ja lähestymistapoja. Parhaita harjoitteita ovat harjoitukset, joissa ei tyydytä käsittelemään vain helppoja lukuja ja juuri sopivaa tietoa. Oppilasta haastetaan vastaamaan tehtäviin, joissa on joko liian vähän tietoa tai liian paljon tietoa. Tehtävissä voi olla vaikeita lukuja ja joissain tapauksissa tehtävään ei voida antaa ratkaisua lainkaan. Oppilaiden ongelmanratkaisukyky kehittyy. Taitoja voidaan käyttää myös jokapäiväisessä elämässä. Matematiikassa laskentataitoa voidaan harjoitella myös sanallisten harjoitusten avulla, koska sanallisten tehtävien tekeminen kehittää ongelmaratkaisutaitoja. (Haapasalo 1998, 87–88.)

Perinteisesti matematiikan opiskelu on ollut teorian, käsitteiden ja valmiiden menetelmien toistoa. Oppituntien kulku etenee opettajan verbaalisen esityksen kautta havainnollisiin esimerkkeihin ja sitten tunnin lopulla oppilaat laskevat annetun mallin mukaan tehtäviä. Oppilaat edistyvät nopeasti, mutta monelle oppilaalle oppiminen voi tarkoittaa vain muistitiedon käyttämistä yhä uudelleen. Varsinaisia kaavoja oppilas ei ymmärrä eikä pysty myöskään soveltamaan niitä. Matematiikassa tarvittavat metakognitiiviset taidot jäävät vähälle, kun oppilas keskittyy lähinnä mallintamaan opettajan esimerkkiä. Tällainen oppiminen perustuu muistin käyttämiselle ja oppimistulosten pysyvyys ei ole hyvä. Matematiikan oppiminen tulisi sitoa käytäntöön, jolloin oppilas ymmärtää matematiikan rakenteet ja matemaattinen ajattelu kehittyy. (Repo 1998, 316, 317.) ”Matematiikan opetuksen pitäisikin luoda vankka perusta soveltamiselle siten, että opetuksen painopisteenä olisi matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden aktiivinen konstruoiminen (Repo 1998, 318).”

> *”On tärkeää, että oppilaat oppivat arvostamaan matematiikkaa, uskovat kykyihinsä käyttää sitä, kypsyvät vähitellen matemaattisten ongelmien ratkaisijoiksi ja kykenevät viestimään ja järkeilemään matemaattisesti. Heitä tulisi rohkaista kokeilemaan, arvailemaan ja jopa tekemää ja korjaamaan virheitä niin, että heidän luottamuksensa omaan kykyynsä ratkaista monimutkaisia ongelmia sekä muodostaa uutta tietoa kasvaa. Heidän pitäisi lukea, kirjoitta ja keskustella matematiikasta sekä pohtia, kokeilla ja muodostaa argumentteja tietyn pohdinnan oikeellisuudesta*. (Haapasalo 1998, 91.)*”*

On merkittävää, että oppilas oppii huomaamaan matematiikan muuksikin kuin kokoelmaksi opittavia käsitteitä ja taitoja. Oppilaan on myös päästävä eroon ajatuksesta, että jokaiseen vastaukseen löytyy varma ja yksiselitteinen vastaus. Oikeiden vastausten löytämistä tärkeämpiä asioita ovat ideointi, päättelyt, arvioinnit, kysymysten esittämiset, kommunikoinnit ja argumenttien muodostaminen. (Haapasalo 1998, 91.) Matemaattisen ajattelun voidaan ajatella muodostuvan operaatioista, joissa on matemaattisia elementtejä, prosesseista ja näiden kahden välisestä dynamiikasta (Ahtee & Pehkonen, 2000, 18).

Koulutusjärjestelmässä huomioidaan opiskelijoiden persoonallisuus niin, että oppimisen tuloksena saadaan aikuisten yhteiskuntaan sopeutuvia kansalaisia. Tavoitteiden tulee olla mukautettavissa niin, että kasvavista nuorista kehittyy taidokkaita ja toiminnallisia demokraattisia kansalaisia. Jotta tällaiseen tulokseen päästään, tarvitaan poikkitieteellistä tutkimusta, jossa opiskelija stimuloidaan tutkimaan eri aiheita eri näkökulmista. Opiskelijaa myös kannustetaan ja rohkaistaan ajattelun taitojen kehittymiseen. Opiskelija omaksuu aiheongelman omakseen ja alkaa työskennellä sen puolesta. Puolet tämänkaltaisesta opetuksesta olisi lähiopetusta ja puolet tiedonhankintaa. Tutkimusta ja tiimityöskentelytaitoja hiotaan taitavan opettajan johdolla. (Rom & Pearlstein 2013, 132–133.)

Oppilas, jonka on vaikea hallita käsitteitä, voi korvata joitain käsitteitä toisilla käsitteillä, jotka vastaavat samaa ilmaisua tai asiaa (French 2003, 22). Jokin sana voi näin tuntua oppilaan ajatuksissa tutummalta ja näin helpommalta käyttää. Näkökulmia on myös toisenlaisia. Yrjönsuuri esittää, että termien määrä matematiikassa on suuri ja niiden käyttö tulisi opetella niin, että ne tarkoittavat aina samaa asiaa. Käsite on helpointa oppia hallitsemaan niin, että aina käytetään samaa nimitystä. (Yrjönsuuri 1998, 132.)

On olemassa ajatus siitä, että uudet matematiikan strategiat, jotka on opiskeltu lyhyellä aikavälillä, pettävät pitkällä aikavälillä. Luvut yhdistetään luvunlaskemiseen. Konkreettisten elementtien käyttö ja esimerkiksi kertolaskut yhdistetään toistettuihin yhteenlaskuihin. Ajatuksessa ei sinänsä mitään väärää. Vanhan päälle rakentuvat matematiikan uudet ajatukset. Lopulta on kuitenkin poistettava ”apupyörät”, jotta oppilaat oikeasti sisäistävät uuden ajatuksen. Tätä käsitettä kutsutaan ”proseptiksi” (Engl. Process = Prosessi, concept=konsepti, käsite). On tärkeää, että matematiikan osaaja hallitsee sekä prosessin että konseptin. Oleellista on selvittää, miten oppilas saa ratkaisunsa, vaikka tärkeää on myös saada oikea vastaus. Oppimisen menetelmänä ei menesty tapa, jossa ruutuja rastittamalla ilmaistaan oppilaan osa-alueiden hallinta. (Stewert 2007, 173–175.) On myös huomattu tutkimuksissa, että sanalliset tehtävät onnistuvat oppilailta helpommin kuin mekaaniset proseduurit. Mekaanisten tehtävien harjoittelua pidetään jopa ajanhukkana. Proseduraalinen tieto syntyy tämän ajatuksen perusteella konseptuaalisen tiedon pohjalta tai yhteydessä siihen. (Haapasalo 1998, 90.)

Murtolukujen ymmärtäminen

Steencken ja Maher tekivät tutkimuksesta kysymyksen: ”Voiko lapsi oppia ymmärtämään murtolukuja?” (2002) Erilaisten harjoitteiden jälkeen he päätyivät tulokseen, että seitsemän opetussession jälkeen lapset olivat rakentaneet itselleen hyvin tärkeitä merkityksiä koskien murtolukuja. He rakensivat malleja, piirsivät kuvia ja kehittyivät huomioimaan ajatuksiaan. Lapset keskittyivät siihen, että yksikön nimeäminen on tärkeää heidän tutkimuksessaan. Oppilaat myös huomasivat ja oppivat, että esimerkiksi kolmannes isosta pitsasta saattoi olla enemmän kuin puolet pienemmästä pitsasta. (Steencken&Maher 2002, 49, 59.)

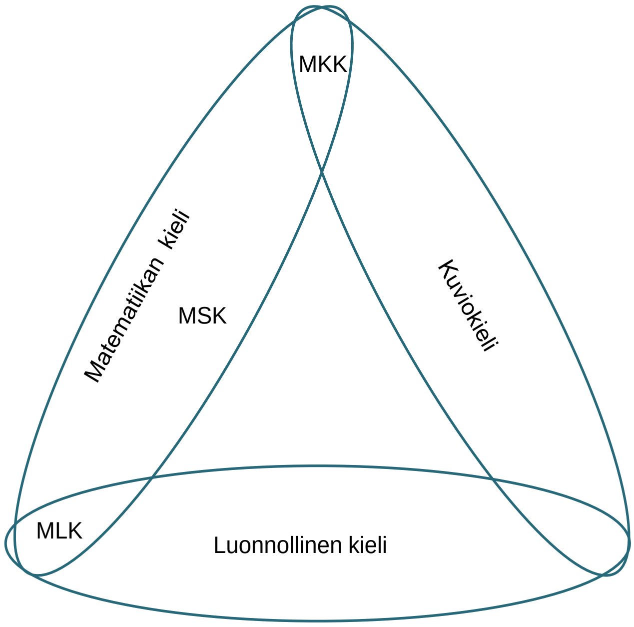
Symbolien ja muodollisen matemaattisen kielen merkitys kehittyy, kun yhteydet tehdään oppijoiden käsitteelliseen ymmärrykseen ja puhuttuun kieleen. Symbolit tulevat välineiksi ajatteluun, kun opiskelijat käyttävät niitä halliten niiden merkitykset. Oppijat, jotka eivät pysty helposti liittämään murtolukujen tulkintoja, eivät pysty ymmärtämään murtolukujen käsitteitä ja toimintoja. He eivät myöskään pysty näkemään murtolukujen hyödyllisyyttä ympäröivässä maailmassa. (Huinker 2002, 73, 74.)

Cramer ja Wyberg pohtivat artikkelissaan, millaisia tapoja oppilaalla voi olla, kun hän lähtee ratkaisemaan murtolukulaskuja. Hän voi lähestyä murtolukumuunnoksia laventamisen kautta. Näin kahden luvun vertailu onnistuu. Oppilas voi myös muuttaa murtoluvun prosenttiluvuksi, jolloin vertailu on jälleen helpompaa. Hahmotusta voidaan hyödyntää myös vaihtamalla puuttuva osa olemassa olevaan osaan. Näin esimerkiksi yhdestä neljäsosasta tulee kolme neljäsosaa. Oppilas voi käyttää myös lukusuoraa nähdäkseen missä kohtaa murtoluku on lukusuoralla. Tärkeää Cramerin ja Wybergin mukaan on se, että oppilas oppi ymmärtämään, millaisista luvuista on kyse. Tapoja ymmärtämiseen on monia. (Cramer & Wyberg 2007, 205–207.)

2.2 Matematiikan kolme kieltä

Matemaattisten tehtävien kirjallinen suorittaminen voidaan nähdä kolmen kielen yhdistelmänä (Joutsenlahti 2009, 76). Aina kaikkia kieliä ei voida käyttää yhtä aikaa, mutta ne limittyvät toisiinsa, kun niitä oppii hyvin käyttämään. Kolmen erilaisen ilmaisutavan huomioiminen opetustyössä on tärkeä lisä opettajan työkaluihin.

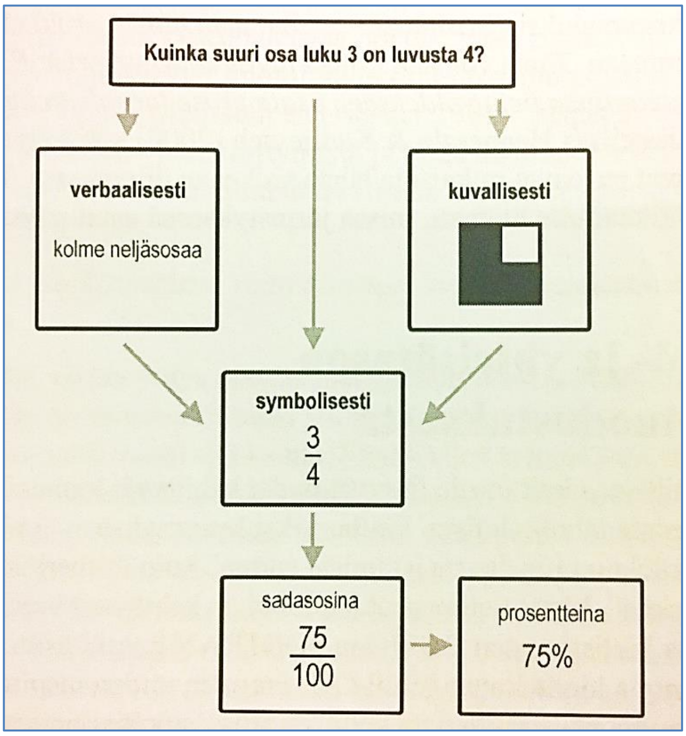
Tavallisin ja tunnetuin matematiikan kirjoitetuista kielistä on m*atematiikan symbolikieli* (MSK). Siinä on niitä symboleja ja lausekkeita, joissa numerot ja merkit ovat pääosassa. Matematiikan symbolikieltä saatetaan kutsua myös matematiikan kieleksi sen sisältämien matemaattisten merkkien takia. Symbolit on yleisesti sovittuja merkkejä (Yrjönsuuri 2004, 112). *Luonnollinen kieli (MLK)* on sitä kieltä, jolla oppilas voi keskustella. Se voi olla mikä tahansa puhuttu kieli (Pimm 1987, 77), jota voidaan myös kirjoittaa. Kuviot ja piirustukset ilmestyvät vihkoihin ja papereihin *kuviokielellä (MKK)*. Nämä kolme kieltä limittyvät toisiinsa matematiikan symbolikielen yhteydessä ja niissä on siten yhteisiä osia. Huomattavaa on, että luonnollisen kielen sanat voivat merkitä eri asioita yleiskielessä kuin matematiikan kielen kohdalla. (Joutsenlahti 2009, 76–77.)



KUVIO 2. Matematiikan kieli, luonnollinen kieli ja kuviokieli, kun rekisterinä on matematiikan sanalisten tehtävien ratkaisun esittäminen. Yhteiset alueet ovat matematiikan luonnollinen kieli (MLK), matematiikan symbolikieli (MSK) ja matematiikan kuviokieli (MKK). (Joutsenlahti 2009, 77)

Oppilaat, jotka ovat taitavia luonnollisen kielen käyttäjiä, eli ne oppilaat, jotka ovat taitavia lukutaidossa, kielentuntemuksessa ja kirjoitustaidossa, voivat käyttää taitojaan myös matematiikan oppimisessa. Matematiikan minäkuva voi parantua, kun kirjallisesti lahjakas oppilas voi jättää taakseen ajatuksen huonosta matematiikan osaamisesta ja voi ilmaista itseään sanallisesti. Sanallisesti ilmaistut vastaukset ovat myös persoonallisempia. (Joutsenlahti 2009, 73.)

Lenni Haapasalo esittää konseptuaalisen ja proseduraalisen tulkinnan avulla, miten matematiikan eri kielet esiintyvät tässä ajattelumallissa. Konseptuaalinen tiedonkäsittely on sitä, että henkilö pystyy osallistumaan ja tiedostaa sekä ymmärtää toimintansa perusteet ja logiikan. Ajattelu voi perustua henkilön itse luomiin konstruktioihin. Proseduraalinen tieto perustuu sääntöihin ja tiettyjen toimintatapojen suorittamiseen. Haapasalo esittää KUVION 3 avulla, että oppilaan ja opettajan lähtökohdat voivat vaihdella ja opitun tiedon arvioiminen ei ole mahdollista ulkopuolisista. Tehtävää tehdessä ollaan aina hetkessä, joka on menossa joko myötä- tai vastatuuleen. Oppilas voi käyttää ratkaisussaan konseptuaalista tietoa, eli toimii tietoisesti valitessaan ratkaisutapaa tai hän voi käyttää proseduraalista tietoa ja ratkaisee tehtävän välittämättä siitä, miten hän oikeastaan sai ratkaistua tehtävän. (Haapasalo 2004, 53–55.)



KUVIO 3. Prosentin käsitteeseen liittyvä konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto Haapasalon mukaan (Haapasalo 2004, 55).

Matematiikan kolmen kielen lisäksi voidaan mainita myös taktiilinen kieli, joka tarkoittaa tässä tapauksessa sitä, että oppilas voi käsin laskemalla tai kokeilemalla ratkaista matemaattisen tehtävän. Taktiilisen toiminnan kieli ilmenee siis konkreettisen materiaalin kautta. (Joutsenlahti & Räyttyä 2015, 51.) Tässä pro gradu –tutkielmassa ei käsitellä taktiilista kieltä tämän enempää vaan keskitytään matematiikan luonnolliseen kieleen, kuviokieleen ja symbolikieleen.

2.2.1 Luonnollinen kieli

Luonnollisen kielen käyttäminen matematiikan opiskelussa auttaa oppilasta. Yhteiset sopimukset kielen- ja symbolien käytöstä on tärkeää. Siihen päästään, kun tehdään havaintoja ja harjoituksia. Mitä nuoremmasta oppilaasta on kyse, sitä useammin ja monipuolisemmin havainnollistamista on tärkeää tehdä, jotta käsite opittaisiin varmemmin. Oppimisessa käytetään kirjallista, kuultua, suullista ja puhuttua informaatiota. Lapset kokevat matemaattiset käsitteet mieluisina, koska matematiikan oppiminen ei ole abstraktioiden oppimista vaan konkreettisten mallien kautta käsitteet tulevat tutuiksi. (Yrjönsuuri 1998, 130–131, ks. myös Yrjönsuuri 1996a.) Matemaattiset tehtävät voidaan siten ajatella olevan osa käytännönläheistä elämää, jolloin jokainen oppilas voi kokea itsensä erilaisten arvoitusten ratkaisijaksi. Iän myötä käsitteet tulevat tutummiksi ja niiden käyttö myös abstraktimmalla tasolla tulevat mahdollisiksi niin, että tehtävän kokonaisuuskin on hallinnassa. Konkretiaa voidaan harjoitella sormien, helmitaulujen, pistelaatikoiden, lankojen ja kuvien avulla (Yrjönjuuri 1998, 132). Konkretia voidaan puhua sanoina, jolloin oppilas käyttää luonnollista kieltä tulkitessaan matematiikkaa. Soveltaminen on hyvä harjoite, jota pidetään konkreettisena tapahtumana. Lapsilla on välillä suppea sanavarasto, joka vaikeuttaa esimerkkien keksimistä. Kuvat ja reflektoiva ajattelu helpottavat lapsen hahmottamista tehtävien alku- ja lopputilanteissa. (Yrjönsuuri 1998, 133.) Opettajan tulee miettiä opetustilanteissa käytettävät esimerkit huolella, koska oppilaissa voi olla muun muassa vieraskielisiä lapsia, joiden suomen kieli ei ole niin laaja, että he pystyvät ymmärtämään esitettyjä asioita. Opettajan on eräällä tavalla supistettava kehyskertomusta sellaiseksi, ettei sen ymmärtäminen vie oppilaan energiaa varsinaisen tehtävän suorittamisesta.

Tavallisesti matematiikan tehtävät koulussa ovat matematiikan kirjaan vastattavia lausekkeiden sievennyksiä ja mekaanisia tehtäviä tai vihkoihin tehtäviä sanallisia tehtäviä. Oppilaan oppimisen kannalta monipuolisuus on hyvä asia. Kun oppilas joutuu ja saa käyttää kieltä monipuolisesti, eli tässä tapauksessa hän käyttää matematiikan symbolikieltä, luonnollista kieltä ja kuvakieltä, hän käsittelee matematiikan tehtävää suuritöisesti. Lisääntynyt energian käyttäminen kehittää ajattelua ja on hyödyllistä sekä oppilaalle itselleen että opettajalle, joka pystyy arvioimaan oppilaan oppimista ja osaamista helpommin. On myös huomattu, että monipuolinen kielenkäyttö vaikuttaa positiivisesti oppilaiden asenteisiin matematiikkaa kohtaan. (Joutsenlahti 2009, 74–75.) Matematiikan opiskelussa tarvitaankin paljon samoja elementtejä kuin äidinkielen opiskelussa. Metataidot, kuten argumentointi sekä luetun ymmärtäminen, ovat taitoja, joita tarvitaan myös matematiikassa, vaikka usein ne liitetään vain äidinkielen opiskeluun. (Joutsenlahti 2010, 164.)

Luonnollisen kielen käyttö matematiikassa on sekä puhuttua että kirjoitettua. Kirjoitetun ja puhutun matematiikan käyttöä kutsutaan luonnollisen kielen käytöksi. Erityisesti kirjoittaessaan oppilas saa aikaa miettimiselle. Oppilas voi kirjoitusprosessin aikana käsitellä asiaa mielessään ja lopullinen vastaus jättää jäljelle pysyvän tuotoksen, jota oppilas voi myöhemmin käydä parantelemassa tai muokkaamassa. Yhtenä hyvänä perusteluna kirjoittamiselle matematiikassa voidaan pitää myös argumentaatiotaitojen kehittymistä. (Joutsenlahti 2009, 75.)

2.2.2 Kuviokieli

Kuviokielen ilmaiseminen on luovaa ja kuvan tuottajan mielikuvituksen sekä taitojen tulos. Kuviokieli voidaan ilmaista piirtämällä tarkkoja mitattuja alueita. Näin esimerkiksi Swan (2001, 148.) Piirtämällä voidaan havainnollistaa murtolukuja eri tavoin. Swan on kuvannut erilaisin tavoin neliön jakamista ja sitä, millaisin murtoluvuin alueita voidaan nimetä. Hahmottamalla kuvia voi ymmärtää paremmin matematiikkaa. Kuvia voidaan yhdistää myös laskutoimituksiin. Se saattaa helpottaa joidenkin oppilaiden hahmottamista. Numeromerkit eivät tällöin rajoita ajattelua, kun kuva korvaa symbolimerkin.

2.2.3 Symbolikieli

Matematiikan symbolien käyttö mahdollistaa matemaattisten toimintojen suorittamisen (Repo 1998, 326). Symbolien merkitykset on sovittu yleisesti osoittamaan määrättyjä käsitteitä. Merkittävää on, että kaikkien symbolien käyttäjillä tulee olla sama käsitys symbolin merkityksestä. (Yrjönsuuri 2004, 112.)

Koulussa murtoluvut opetetaan kokonaislukujen suhteita harjoitellessa. Määritelmänä pidetäänkin sitä, että murtoluvut osoittavat kokonaislukujen suhdetta. (Kangasniemi 2009.) Tätä voidaan pitää ongelmallisena. Valotan tätä esimerkin kautta: Mehutiivistepullon etiketissä on laimennusohje 1:9. Tämä tarkoittaa sitä, että laitetaan yksi osa mehutiivistettä ja yhdeksän osaa vettä. Tämän ohjeen mukaan mehussa olisi 10 osaa, joista yksi osa on tiivistettä. Tällöin mehutiivisteen määrä ilmoitettuna murtolukuna olisi $\frac{1}{10}$. Mehutiivisteen ja veden suhde on $\frac{1}{10}$.

Varhaisimmat murtolukumerkinnät löytyvät jo muinaisen Egyptin ajoilta papyruksille kirjoitettuina. Meidän aikamme murtolukumerkintä on nuorempi. Niiden ensimmäisiä muotoja käytettiin Platonin aikaan (427 eKr.–347 eKr.), mutta silloin murtolukuja käytettiin vain suhdelukuina. Ajateltiin, etteivät matemaattiset yksiköt ole jaettavia, vaikka esimerkiksi kaupankäynnissä murtolukuja kyllä käytettiin. Murtolukuja suorastaan halveksittiin. Arkhimedes (s. 287 eKr.) omissa laskelmissaan oli jo mestari murtolukujen käsittelyissä, kun hän kehitti ympyrän mittaamista. Meille tuttua merkintätapaa käyttivät kreikkalaiset 100-luvulla ja sitten hindulaisetkin 200-luvulla. (Flegg 2002, 184, 216, 217, 224.)

Murtoluvun etymologian mukaan murtolukujen osien nimien taustalla on saksalaiset sanat. Osoittajan taustalla on ”zahl”, luku ja nimittäjän ”nennen”, nimittää. Osoittaja osoittaa tai kertoo, kuinka monta murto-osaa luvussa on. Nimittäjä antaa murtoluvulle nimen. (Thompson 1993, 260.)

Rationaaliluvun määritelmä

Koska jokainen rationaaliluku voidaan ilmaista murtolukuna, voidaan seuraavaa määritelmää pitää murtoluvun määritelmänä:

$$Q = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{m}{n}; m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

Tämä tarkoittaa: Ilmaisun mukaan m ja n voivat olla kokonaislukuja. Tällöin $\frac{m}{n}$ tarkoittaa murtolukua. Lisähuomautus n $\neq 0$ on merkittävä, koska nimittäjä ei voi olla nolla. (Oinas-Kukkonen ym. 1987, 11.) Murtoluku on siis luku, joka ilmaisee osan kokonaisuudesta. Se on kirjoitettu luvuilla murtoviivan ylä- ja alapuolella. Alapuolella oleva luku, *nimittäjä*, kertoo, kuinka moneen osaan kokonainen on jaettu. Yläpuolella oleva luku, *osoittaja*, kertoo, kuinka monta osaa on valittu. Murtoluvuissa tarkastellaan murto-osaa. (Kornegay 1999, 158.)

2.3 Kielentäminen

Kielentäminen on matemaattisen ajattelun ilmaisemista neljällä kielellä, joita ovat luonnollinen kieli, matematiikan symbolikieli, kuvakieli ja taktiilisen toiminnan kieli. Ääneen ajattelua käytetään, kun selvitetään esimerkiksi, millaisia työskentely- ja ajattelutapoja ihmisellä on. Ääneen ajattelu voi auttaa ongelmanratkaisutilanteissa, kun henkilö muodostaa sanoiksi ajattelukuvioitansa ja huomaa ajattelumalleissaan vaikka ristiriitaisuuksia ja epäjohdonmukaisuuksia (Ilves 2005, 218, 220). Kielentäminen soveltuu hyvin matematiikkaan.

Kielentämistä käytetään ajattelun jäsentämisen tukena. Kielentämisen avulla oppilaat voivat myös oppia toisiltaan. (Joutsenlahti 2003a.) Kun oppilas käyttää luonnollista kieltä, hänen ymmärryksensä tulee ilmi hänen käyttäminään merkityksinä, jotka hän on antanut matemaattisille käsitteille. (Joutsenlahti & Rättyä 2011, 173.) Opettajan näkökulmasta ääneen ajattelu, eli tässä tapauksessa kielentäminen, on keino, jolla opettaja voi saada tietoa oppilaan ajatteluprosesseista. (Ilves 2005, 220.) Bauersfeld käyttää käsitettä ”languaging” luonnollisen kielen käytön yhteydessä. Hän tarkoittaa sillä puhetta tai puhumista matematiikan tunneilla, jolloin ”languaging” vaikuttaa oppilaiden ajattelun kehittymiseen. ”Languaging” on ajattelun ilmaisemista toisille, jossa samalla myös oma ajattelu kehittyy. Tätä luonnollisen kielen käyttöä Bauersfeld pitää oppimisen kannalta parempana vaihtoehtona kuin keinotekoisten kielten käyttöä. Bauersfeld toteaakin: ”*There is no understanding and no access without the flexibility and metaphors of everyday languaging*”. (Bauersfeld 1995, 272.)

Nykyinen multimodaalinen kielentämisen malli hyödyntää tarkoituksellisesti eri tapoja merkityksen tekemisessä. Kielentämisen taustalla on ajatus, että jos oppilaat joutuvat käyttämään eri tapoja ilmauksessaan, he saavat enemmän käsitystä aiheesta. Näin ollen oppilaat kirjoittavat ja piirtävät matemaattisia tehtäviä suorittaessaan. (Joutsenlahti & Kulju 2017.)

Kielentämisen käyttö toimii keinona ilmaista ajattelua useilla eri tavoilla. On osoitettu, että kirjoittaminen ja luonnollisen kielen käyttö matemaattisten ongelmien ratkaisuissa voivat itse asiassa lisätä matematiikan oppimista, kehittää matemaattista ymmärrystä, muuttaa oppilaan suhtautumista matematiikkaan paremmin ja auttaa opettajan arviointia. (Joutsenlahti & Kulju 2017 [Morgan ym. 2001].)

Luonnollisen kielen käyttö matematiikassa on sekä puhuttua että kirjoitettua. Kirjoitetun ja puhutun matematiikan käyttöä kutsutaan luonnollisen kielen käytöksi. Erityisesti kirjoittaessaan oppilas saa aikaa miettimiselle. Oppilas voi kirjoitusprosessin aikana käsitellä asiaa mielessään ja lopullinen vastaus jättää jäljelle pysyvän tuotoksen, jota oppilas voi myöhemmin käydä parantelemassa tai muokkaamassa. Yhtenä hyvänä perusteluna kirjoittamiselle matematiikassa voidaan pitää myös argumentaatiotaitojen kehittymistä. (Joutsenlahti 2009, 75.) Konkretia voidaan puhua sanoina, jolloin oppilas käyttää luonnollista kieltä tulkitessaan matematiikkaa. Soveltaminen on hyvä harjoite, jota pidetään konkreettisena tapahtumana. Lapsilla on välillä suppea sanavarasto, joka vaikeuttaa esimerkkien keksimistä. Kuvat ja reflektoiva ajattelu helpottavat lapsen hahmottamista tehtävien alku- ja lopputilanteissa. (Yrjönsuuri 1998, 133.)

Kielentämistä voidaan nähdä myös kolmen kielen yhdistelmänä (Joutsenlahti 2009, 76), jolloin puhutaan multimodaalisesta lähestymistavasta matemaattisen ajattelun ilmaisemiseen. Siinä esiintyvät matematiikan symbolikieli, luonnollinen kieli ja kuvallinen kieli. (Joutsenlahti & Kulju 2017.) Tavallisesti matematiikan tehtävät koulussa ovat matematiikan kirjaan vastattavia lausekkeiden sievennyksiä ja mekaanisia tehtäviä tai vihkoihin tehtäviä sanallisia tehtäviä. Oppilaan oppimisen kannalta monipuolisuus on hyvä asia. Kun oppilas joutuu ja saa käyttää kieltä monipuolisesti, eli tässä tapauksessa hän käyttää matematiikan symbolikieltä, luonnollista kieltä ja kuvakieltä, hän käsittelee matematiikan tehtävää isolla työmäärällä. Lisääntynyt työmäärä kehittää ajattelua ja on hyödyllistä sekä oppilaalle itselleen että opettajalle, joka pystyy arvioimaan oppilaan oppimista ja osaamista helpommin. On myös huomattu, että monipuolinen kielenkäyttö vaikuttaa positiivisesti oppilaiden asenteisiin matematiikkaa kohtaan. (Joutsenlahti 2009, 74–75.)

2.4 Opetussuunnitelma

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden pohjalta laaditaan kunnalliset perusopetuksen opetussuunnitelmat. Se on kansallinen kehys, jonka pohjalta kunnat laativat omat kuntakohtaiset opetussuunnitelmansa. Niissä on linjattu kuntatasolla perusopetuksen kasvatus- ja opetustyötä ja niissä täsmennetään perusteissa määriteltyjä tavoitteita. Perusopetuksen opetussuunnitelma jaetaan kahteen osaan. On yhteinen osa ja yksittäisiä oppiaineita esittelevä osa. Muun muassa opetuksen arvot, oppimiskäsitys ja oppimisympäristöt sekä työtavat kuuluvat yhteiseen osaan. Eri oppilaineet ja niiden sisällöt ja tavoitteet ovat oppiainekohtaisessa osassa. Opetustoimissa työskentelevien henkilöiden tulee noudattaa perusopetuksen opetussuunnitelmaa, koska se on määräyskirja ja normi. (Uudenkaupungin OPS 2014.)

Perusopetuksen opetussuunnitelma 2016 painottaa matematiikan teemojen ymmärtämistä ja oppimista monin eri tavoin. Ongelmanratkaisutaidot ja konkreettisuus tulee huomioida opetuksessa. Kumulatiivista oppimisjärjestystä käytetään oppimismenetelmänä, kun vanhan opitun päälle tehdään uusia oivalluksia ja oppiminen voi linkittyä aiemmin opittuun. (Opetussuunnitelman perusteet 2014, 262.)

Kuljun ja Joutsenlahden (2010) mukaan matematiikan opiskelussa ja äidinkielen opiskelussa opetussuunnitelman perusteet sisältävät samoja teemoja (Kulju & Joutsenlahti 2010, 165) Näin oli Perusopetuksen opetussuunnitelmissa 2004 ja sama linja jatkui myös Perusopetuksen opetussuunnitelmassa 2014. Oppilaan taitoja perustella toimiaan ja selittää ratkaisujaan toisille sekä tekstitaidot mainitaan sekä matematiikan että äidinkielen osioissa. (Opetussuunnitelman perusteet 2004 ja 2014.)

Murtoluvut Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014:ssa

> *”Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia. Matematiikan kumulatiivisesta luonteesta johtuen opetus etenee systemaattisesti. Konkretia ja toiminnallisuus ovat keskeinen osa matematiikan opetusta ja opiskelua. Oppimista tuetaan hyödyntämällä tieto- ja viestintäteknologiaa.*
>
> *Matematiikan opetus tukee oppilaiden myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan ja positiivista minäkuvaa matematiikan oppijoina. Se kehittää myös viestintä-, vuorovaikutus- ja yhteistyötaitoja. Matematiikan opiskelu on tavoitteellista ja pitkäjänteistä toimintaa, jossa oppilaat ottavat vastuuta omasta oppimisestaan.*
>
> *Opetus ohjaa oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa. Opetus kehittää oppilaiden kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti.*
>
> (Opetussuunnitelman perusteet 2014, 262.)”

Murtolukujen opetuksesta mainitaan opetussuunnitelman perusteissa 2014 alaluokkien kohdalla seuraavasti:

- Vuosiluokat 1–2 Sisältö 2:ssa mainitaan laskutoimituksien opettamisessa: *”Pohjustetaan murtoluvun käsitettä jakamalla kokonainen yhtä suuriin osiin.”* Kolmannelle luokalle tultaessa oppilas on täten tietoinen murtolukutermistä ja on saanut opetusta siitä, mitä on jakaa kokonainen yhtä suuriin osiin. Osien määrästä ei ole mainintaa.

- Vuosiluokkien 3–6 kohdalla mainitaan seuraavaa: *”Matematiikan opetuksessa varmennetaan ja laajennetaan oppilaiden lukukäsitteen ja kymmenjärjestelmän ymmärtämistä. Lisäksi kehitetään laskutaidon sujuvuutta... Opitaan murtoluvun käsite ja harjoitellaan murtolukujen peruslaskutoimituksia eri tilanteissa... Hyödynnetään murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin välisiä yhteyksiä.”*

(Opetussuunnitelman perusteet 2014)

Voidaan ajatella, että kuudennen luokan lopulla oppilas ymmärtää murtolukukäsitteen ja hallitsee murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin välillä olevia lainalaisuuksia. Opetussuunnitelmassa mainitaan, että murtolukulaskuja harjoitellaan eri tilanteissa. Eri tilanteet voivat vaihdella arjen ongelmatilanteista erilaisiin kuviteltuihin harjoitteisiin. Murtolukujen merkittävää sidosta desimaalilaskuihin ja prosenttilukuihin ei painoteta. Opetussuunnitelman perusteissa 2014 on varsin vähän mainintaa murtoluvuista. Ne mainitaan, mutta niiden hallittavuudestakaan ei ole tarkempaa kirjoitusta.

2.5 Käsitekuva

Jotta voisimme ymmärtää, miten käsitekuva muodostuu ihmisen aivoissa, meidän on erotettava käsitteet, jotka ovat muodollisesti määriteltyjä ja kognitiiviset prosessit, joiden avulla ne on suunniteltu. Menetelmä ei ole sattumaa, muttei myöskään puhdasta logiikkaa. Käytämme termiä käsitekuva kuvailemaan käsitteeseen liittyvää kokonaiskognitiivista rakennetta. Se sisältää myös kaikki henkiset kuvat ja niihin liittyvät ominaisuudet ja prosessit. Käsitekuva rakentuu vuosien ajan kokemusten kautta ihmisen saamien ärsykkeiden kautta. (Tall & Vinner 1981.)

Tutkimuksessa selvitetään oppilaiden ajatuksia ja ennakkoluuloja murtolukulaskemiseen. Nämä ovat oppilaiden käsitekuvia murtolukulaskuista. Tall esittää käsitekuvan muotoutuvan niistä elementeistä, joita ihmisillä on valmiina omassa elämässään. Ihminen katsoo sisältä ulospäin ja linkittää näin kokemuksensa ja historiansa aina suhteessa erilaisiin asioihin. Hän mieltää, itsestään lähtien, miten hän minkäkin asian käsittelee suhteessa itseensä. (Tall 2016.)

Käsitekuva kertoo siitä, miten ihminen ajattelee itsensä suhteessa johonkin asiaan. Matematiikan kohdalla käsitekuva sisältää kuvio 1 mallin mukaan, ihmisen itsensä käsityksen suhteessa matematiikkaan. Käsitekuvaan liittyvät esimerkiksi oppijan tiedot, uskomukset, käsitykset sekä asenteet ja tunteet. Mikään aiheista ei ole vähäpätöinen ja käsitekuva koostuukin monesta pienemmästä komponentista.

2.6 Konstruktivistinen näkemys matematiikan opetuksessa

Oppilas perustaa tietoa vanhan tiedon päälle. Oppilaan omilla kokemuksilla on merkittävä osa tiedonmuodostuksessa. Konkretian kautta oppilas oppii ymmärtämään abstrakteja käsitteitä ja yleistyksiä. Tärkeässä ominaisuudessa on oppimisprosessi. Oppimistulokset nähdään ennemminkin sivutuotteina kuin päämäärinä. (Happonen ym. 2005, 133.)

Opettaja ohjaamassa konstruktiivisessa opetuksessa

Konstruktivistinen oppimiskäsitys voidaan kuvata niin, että opettaja ohjaa oppilaiden työskentelyä, on palautteen antaja, esittää kysymyksiä ja tarvittaessa auttaa oppilasta. Opettaja seuraa oppilaiden oppimisprosessia ja sen etenemistä ja arvioi oppilaiden toimintaa. Opettaja toimii asiantuntijana opittavassa aiheessa (Kauppila 2007, 43). Tehtäviä suunnitellessaan opettajan tulee huomioida, etteivät oppilaat vain tyydy ohjeiden mekaaniseen noudattamiseen. Tehtävät muotoillaan niin, että oppilaat myös analysoivat ja pohtivat saamiaan tuloksia. Kun oppilas vielä perustelee vastauksensa, hänen metakognitiivinen tietämyksensä kehittyy. Opettaja auttaa oppilaita jäsentämään ja täydentämään saamiaan tuloksia. (Repo 1998, 324–325. sekä Haapasalo 1998, 77.) Konstruktivistisessa oppimiskäsityksessä tärkeää ei ole ulkoa oppiminen vaan tärkeää on ymmärtää opittu asia. Oppiminen on ratkaisukeskeistä ja ongelmakeskeistä. Kokonaisuuksien käsittämistä suositaan. (Kauppila 2007, 43–44.)

Konstruktivistista mallia voidaan hyvin hyödyntää jo alakoululuokilla. Uuden opetussuunnitelman ilmiöpohjainen oppiminen sopii hyvin konstruktivistisen mallin käyttöön. Oppilaan oppimistoiminnon kohdalla kokeellisessa työskentelyssä voidaan erilaisten mallien ja havaintovälineiden avulla harjoitella opittua ja oppilaalle tarjoutuu tällöin mahdollisuus oivaltaa itse käsiteltävänä olevan ongelman ratkaisukaava. Kun oppilas on oivaltanut tavan ratkaista ongelman, hän pystyy lähestymään sitä myös toiselta suunnalta ja näin hän ymmärtää ja pystyy soveltamaan oppimaansa myöhemminkin. Opettajaa tarvitaan tällaisessa oppimisessa lähinnä rohkaisemaan oppijaa kokeilemaan erilaisia tapoja omaksua opittava asia. (Kauppila 2007, 37–38.)

Oppilaan vastuu

Konstruktivistisessa oppimiskäsityksessä on olennaista se, että opetuksessa hyödynnetään oppilaan aiemmin omaksumia tietoja ja opetus siten mukautetaan oppilaskohtaisesti. Opetuksessa ei vain esitetä yleisesti hyväksyttyjä määritelmiä ja operaatioita. Pyritään vaikuttamaan niin, että oppilaan käsitykset, tulkinnat, tarkoitukset ja merkitykset muuttuvat. Oppilaalle on tärkeää osata käyttää aikaisempia tietovarastoja ja opittuja lähestymistapoja, jotta ne olisivat pohjana uuden tilanteen havaitsemiselle ja uuden tiedon oppimiselle. Konstruktivistisessa oppimiskäsityksessä opetuksen pohjana ovat yhteinen kieli, kulttuuri ja yhteiskunnan historia. (Leino 1998, 40, 41. Myös Happonen ym. 2005, 133.)

Konstruktivistinen menetelmä matematiikan opetuksessa

Konstruktivistinen suuntaus matematiikan opetuksessa voi tarkoittaa sitä, että painotetaan ongelmatilanteiden löytymistä, sopivien kysymysten esittämistä ja kysymyksiin vastaamista joko yksin tai ryhmässä. Matematiikka on tällöin työväline, jolla voidaan jäsentää ongelmia ja ratkaista niitä. (Leino 1998, 49.)

Konstruktivistinen lähestymistapa matematiikan opiskeluun voi tapahtua Haapasalon (1993) mukaan seuraavasti: Ensimmäisessä osassa orientoidutaan teemaan ja sen jälkeen määritellään opeteltava asia. Toinen vaihe sisältää kolme osaa, josta ensimmäistä kutsutaan tunnistamisvaiheeksi. Siinä oppilas saa huolella valitut tehtävätyypit tehtäväkseen. Näin hänelle tarjotaan mahdollisuus sisäistää relevantit tunnusmerkit. Sitten oppilas alkaa tuottaa itse harjoituksen mukaisia vastauksia verbaalisesti, kuvallisesti ja symbolisesti. Lopuksi oppilaan oppimaa tietoa vahvistetaan lujittamisvaiheella. Oppilaat joutuvat muuttamaan toimintatapojaan ja opettaja huomaa myös, että vanha tapa toimia opetustilanteessa onkin muuttunut. (Haapasalo 1993, 6–8. Myös Haapasalo 1998, 62.)

Kritiikkiä konstruktivistisesta opetuksesta

Motivaatiosta puhutaan vähän konstruktivistisen oppimisen kohdalla. Päivi Tynjälä puolestaan viittaa konstruktivistisia oppimiskäsityksiä pohtivassa teoksessaan Blumenfeldin (1992) tutkimuksiin. Motivaatiotekijöitä ei useinkaan huomioida konstruktivistisessa oppimiskäsityksessä. Oppilaalle annettavien mielekkäiden tehtävien oletetaan innostavan kuin itsestään tehtävä- ja oppimis-orientaatioon. Konstruktivistisesta näkökulmasta motivaation tarkastelu kohdentuu oppilaan oman oppimistilanteen tulkintaan. Myös oppilaan edeltävät kokemukset opittavasta ja sosiaaliset tekijät vaikuttavat motivaatiotekijöihin. (Tynjälä 1999, 148–168 .)

3 TUTKIMUSKYSYMYS JA TUTKIMUSASETELMA

Tutkimuskohteena on se, miten laadittu opetusmateriaali toimii murtolukukäsitteen opetuksessa viidesluokkalaisilla oppilailla.

Teoreettiset käsitteet linkittyivät toisiinsa murtolukujen kielentävien tehtävien harjoituksissa ja oppilaiden murtolukuihin liittyvien mielikuvien kokoamisella. Taustalla vaikuttavat opetussuunnitelman perusteet 2014 ja matematiikan kolmen kielen lähestymistapa. Konstruktivistinen oppimiskäsitys ja sen mahdollistamat puitteet ohjaavat murtolukulaskemisen opetusmateriaalin työstämisessä.

3.1 Tutkimuskysymys

Tutkimuskysymyksenä on selvittää

1. miten oppilaat suhtautuvat murtolukulaskuihin ja
2. miten neljän oppitunnin (oppimateriaali) kokonaisuus vaikuttaa oppilaisiin,

kun oppilaiden tekemien harjoitusten yhtenä vahvana osana on kielentäminen, eli osaamisen ilmaiseminen sanoin.

3.2 Tutkimusasetelma ja toteutus

Murtolukutehtävien miettiminen, toteuttaminen ja viimeistely tapahtuivat vuoden aikajakson aikana. Aivan aluksi käänsin hepreankielisestä matematiikan kirjasta osuuksia. Huomasin, että konstruktivistinen tapa edetä opetuksessa oli mukana. Omien tehtävien luomistyö oli oma vaiheensa. Siinä sain onneksi apua ystäviltä. Tehtävät piti ryhmittää ja järjestää. Toukokuussa 2017 opetusmateriaali testattiin hämeenlinnalaisella viidennellä luokalla. Oppilaat tutkivat tehtäviä ja antoivat palautetta. He myös osallistuivat kyselyyn, jossa kartoitettiin heidän mieltymyksiään matematiikkaan ja murtolukuihin.

Kesällä 2017 korjailin löydettyjä virheellisyyksiä ja oppilaiden mielestä vaikeasti ilmaistuja asioita. Parantelin harjoitusten muotoja ja joitakin harjoituksia jätin pois. Kuvitus ja puhekuplat sekä sivuasettelu tuli viimeisteltyä. Toisen kerran oppilaat pääsivät käymään tehtäviä läpi syksyllä 2017. Toinen testiryhmä oli eri koulusta kuin ensimmäinen. Tällä kertaa oppilaat oikeasti opiskelivat murtolukulaskuja. Tunneilla läsnä olivat lisäkseni opettaja ja välillä myös ohjaaja. Oppilaat saivat kysyä tehtäviin liittyviä kysymyksiä. Neljän tunnin tarkoitus oli, että niiden aikana oppilaat myös sekä kertaisivat murtolukuteemaa että oppisivat jotain uutta.

Tutkimus myötäilee design based research –menetelmää, joka on tyypillinen kehittämis-tutkimus. Itse laaditun materiaalin tarkistus ensimmäisessä tutkimusluokassa oli ensimmäinen vaihe. Uusi kokeilu korjatulla materiaalilla oli toinen vaihe. Kolmannessa vaiheessa korjattiin virheitä ja täydennettiin puutteita. Kolmen vaiheen sykli toteutui. Tutkimukseni on siten kehittämistutkimus, joka myötäilee muun muassa Edelsonin mallia, jossa ensin esitellään kehittämisprosessi, sitten toteutetaan ongelma-analyysi ja lopuksi esitellään kehittämistuotos. (Edelson 2002.) Tutkimuksessani tein suunnitelman, jossa eri vaiheet, kuten testiryhmien kohtaaminen ja tuotettavan materiaalin korjailu ja parantelu, olivat näkyvimpiä osia. Sitten aikaa jätettiin pohtimiselle ja palautteiden analyyseille. Tutkimuksen lopputuotoksena on valmistettu opetusmateriaali, joka käsittelee murtolukujen opettelua viidennellä luokalla. Tutkimus on alkanut toiveesta tuottaa uutta materiaalia, joka vastaisi opettajien tarpeita ja uutta opetussuunnitelmaa. Myös konstruktivistinen näkökulma on vahvasti esillä. (Edelson 2002.)

3.2.1 Kaksi viidesluokkaa osallistui tutkimukseen

Ensimmäinen testiryhmä tutustui murtolukumateriaaliin tarkistaen virheitä ja ontuvia ilmaisuja tai epäselviä tehtäviä ja teoriaosuuksia. Tutkimuksessa mukana olleen luokan oppilasmäärä oli 27 oppilasta, mutta viideltä oppilaalta ei saatu tutkimuslupaa. Nämä oppilaat kuitenkin osallistuivat tutkimukseen muiden mukana, mutta heidän palautteitaan ei käytetty tutkimuksen muissa vaiheissa. Luokanopettaja oli toiminut luokan opettajana kolme vuotta. Oppilaista 13 oli poikia ja 14 tyttöjä. Tutkimus toteutettiin luokan omassa tilassa luokanopettajan ollessa pääsääntöisesti paikalla. Ensimmäisen ryhmä täytti myös mielikuvia selvittävän kyselykaavakkeen ja teki testin ennen ensimmäistä tuntia ja viimeisen tunnin jälkeen. Testissä selvitettiin, miten oppilaat olivat kehittyneet murtolukuosaamisessa neljän tunnin aikana.

Toinen testiryhmä opiskeli murtolukuja valmistettua materiaalia käyttäen. Tutkimukseen 20 osallistui toisessa vaiheessa 20 oppilasta. Heidän kohdallaan pyrittiin minimoimaan tutkimuksellinen näkökulma, vaikka oppilaat arvioivatkin materiaalia jokaisen oppitunnin jälkeen.

Tutkija kävi luokassa tutustumassa oppilaisiin ennen tutkimusta ja oppilaille kerrottiin tarkkaan, mitä heiltä odotetaan ja mitä varten he ovat osallistumassa tutkimukseen. Tutkija toimi luokassa osallistuvana havainnoijana, koska hänen tehtävänsä oli tutkimuksen aikana myös puuttua oppilaiden oppimiseen ja opastaa materiaalin käytössä (Metsämuuronen 2008, 43). Matematiikan **oppimateriaalien kehittäminen** pyrkii löytämään uusia tapoja lähestyä matemaattisia kysymyksiä, ja matematiikan oppimisen haasteellisuuden takia materiaalien tulisi olla mahdollisimman monia palveleva.

3.2.2 Triangulaatio

Triangulaatio tutkimmuksessa tarkoittaa sitä, että tutkittavaa ongelmaa lähestytään mahdollisimman useasta näkökulmasta. Triangulaatiossa eri metodit voivat kohdata ja ne eräällä tavalla keskustelevat keskenään ja näin saada tutkittavasta aiheesta enemmän tietoa. Näin, jopa ristiriitaisista tuloksista voidaan keskustella. Triangulaatiossa ei sitouduta vain yhteen näkökulmaan. Triangulaation käyttäminen voi parantaa tutkimuksen validiteettia eli vakuuttavuutta. (Tuomi & Sarajärvi 2003, 140–141.)

Triangulaatio voidaan nähdä esimerkiksi lähestymisenä tutkimusaineiston kautta, tutkijan näkökulmasta, teoriaan pohjautuen tai metodologisena triangulaationa. Triangulaatio tarkoittaa sitä, että useampaa lähestymistapaa käytetään samanaikaisesti ja jokaisella lähestymistavalla on merkitystä. (Tuomi & Sarajärvi 2003, 142. Myös Tuomi 2007, 153–154.)

3.2.3 Kyselylomake murtolukumieltymyksistä

Tutkimuksessa mukana olleet oppilaat antoivat palautetta jokaisen tapaamiskerran jälkeen. Oppilaat arvioivat jokaista yksittäistä oppimateriaalia tunnin päätteeksi. Ensimmäinen testiryhmä osallistui myös kyselyyn, jossa selvitettiin viidesluokkalaisten oppilaiden ajatuksia murtolukulaskemisesta yleensä ja valmistetun opetusmateriaalista. Kyselykaavakkeet tulostettiin poikkeuksellisesti väritulostimella, jotta valitut hymiöt saatiin elävämmiksi. Viisiportaisessa mittaristossa hymysuussa oli raikas väri, mutta surukasvossa vuotivat siniset kyynelnorot.

Alku- ja loppukyselyn (Liite 1 ja Liite 2) tarkoituksena oli antaa oppilaille mahdollisuus kertoa itse, mitä mieltä he ovat murtoluvuista ja niillä laskemisesta. Viidesluokkalaisella oppilaalla on jo kokemusta murtoluvuista ja sanan “murtoluku” kuullessaan, hänellä on jo jonkinlainen mielikuva asiasta. Vastaaminen oli mielikuvien esittämistä. Oppilaan ei tarvinnut hallita murtolukuja, vaikka sanoi, että ymmärtää täysin. Ohessa olleen testin avulla kartoitettiin aiheenhallintaa.

Väittämäasettelu lähestyi teemaa positiiviselta näkökulmalta ja lomakkeella oli tilaa myös ilmaista, jos jokin asia oli jäänyt mietityttämään murtolukulaskuissa.
Loppukyselyssä kysymykset oli luokiteltu niin, että ensin oli yleinen osio ja sitten kysyttiin oppilaiden mielipiteitä valmistetusta oppimateriaalista. Oppilailla oli mahdollisuus ilmaista omin sanoin parannusehdotuksiaan, jos niitä sattui tulemaan mieleen palautetta kirjoittaessaan.

3.2.4 Kielentämisen esiintyminen opetusmateriaalissa

Opetusmateriaalin tarkoituksena oli lisätä kielentäviä tehtäviä murtolukujen tehtäviin. Tehtävien suunnittelussa pohdittiin tarkasti sitä, miten lähestytään uutta asiaa ja miten lähestytään aihetta mahdollisimman käytännönläheisesti. Kirjallisille vastauksille päätettiin jättää tarpeeksi tilaa ja harjoituksen, joissa oppilaan tuli osoittaa ratkaisumallinsa, jätettiin aivan tyhjäksi. Avuksi ei annettu esimerkiksi ruudukkoa tai muuta merkistöä, joka voisi rajoittaa oppilaan omaa luovaa ratkaisutapaa.

Tehtävissä pyrittiin myös siihen, että satumaiset hahmot tai muut fiktiomaailmaan liittyvät tutut tai tuntemattomat hahmot ohjaisivat oppilaan ajattelua tai ennakko-odotuksia. Tehtävien tarinat ja taustat liittyivät ennemminkin tavalliseen elämään ja tavallisiin asioihin.

Seuraavassa esitellään muutamia mallitehtäviä opetusmateriaalista. Tehtävien laadintaa myös avataan kuvaamalla prosessia, jolla tehtävä valmistui lopulliseen muotoonsa.

Harjoitus 1 (tunti I)
Leikkaa monistenipun lopusta KUVIO 1, joka on neliö.
Jaa neliö taittelemalla kahteen yhtä suureen osaan. Jaa sen jälkeen vielä kahteen osaan, siis neliö jaetaan neljään yhtä suureen osaan.
Kuinka monella eri tavalla jako voidaan tehdä?
Millaisia ratkaisuja keksit? Yritä selittää kirjoittamalla.

Harjoituksen ohjeen alla on tilaa kirjoittaa ja selittää. Tarkoituksena on saada oppilas havahtumaan siitä, että matematiikan tuntia ei aloitettu numeroita kirjoittamalla vaan kirjoittamalla eli sanallistamalla. Harjoitus saattaa olla helppo taittelutehtävä, mutta ratkaisun kirjoittaminen on huomattavasti vaikeampaa. Harjoituksen avulla on myös tarkoitus havainnollistaa se, että neliö jaetaan yhtä suuriin osiin ja vaihtoehtoja on useampia. Lähestymistapoja murtolukulaskuihinkin on useampia.

Teoriaosuus, jonka tarkoituksena on tuoda murtoluvut käytäntöön, etenee vuoropuheluna opettajan ja oppilaiden välillä. Haluan tuoda esille sen, että oppilaskin voi tehdä oivalluksen. Opettajan ei aina tarvitse kertoa kaikkia vaihtoehtoja vaan oppilaillakin on mahdollisuus tuoda esille aivan oikeita vastauksia.

Kuvakielen käyttämistä harjoitellaan piirtämällä ympyrä. Yhden kokonaisen jakaminen osiin on murtolukulaskemisen tärkeä hallintaosa-alue. Harjoituksessa pyydetään piirtämään harpilla ympyrä. Se, että harppi otetaan käyttöön, antaa oppilaalle mahdollisuuden toteuttaa kädenliikettä ja nähdä tuotos paperilla. Harppia tarvitaan myös myöhemmin matematiikan opiskelussa, joten harpin käytön harjoittelu viidennellä luokalla tavallaan huomaamatta, antaa oppilaalle mahdollisuuden kokeilla ilman paineita. Nythän ei varsinaisesti katsota ympyrää, vaan osaa.

Harjoitus 4
Piirrä kakku harppia tai ympyrämuottia apuna käyttäen. Jaa kakku neljään yhtä suureen osaan. Väritä kolme osaa vihreällä. Miten ilmoittaisit värittämäsi alueen matematiikan kielellä?

Kirjoitan: $\frac{\square}{\square}$

Kielentämistä harjoitellaan lisää miettimällä murtolukuja arkipäivän elämässä. Tarkoituksena on, että oppilas pysähtyy hetkeksi ajatuksissaan. Miettimällä hän huomaa, miten paljon hyvin erilaisissa tilanteissa oletetaan, että ihminen tietää murto-osat ja osaa toimia murtotoimitusten kanssa. Ajatus harjoituksessa on myös se, että oppilas ei etsi valmiita vastauksia, vaan tuottaa itse vastausta omasta elämästään.

Harjoitus 9
Keksi esimerkki siitä, miten murtoluvut näkyvät arkipäivän elämässä. (Esimerkki ei ole vain yksi sana! Kirjoita kokonaisilla lauseilla.)

Ensimmäisen tunnin kaksi viimeistä harjoitusta ovat myös kielentäviä. Niissä oppilaalta odotetaan pohtivaa lähestymistä periaatteessa hyvin yksinkertaiseen asiaan. Sanallisista vastauksista tämänkaltaisissa tehtävissä on paljon apua opettajalle, kun hän alkaa arvioida oppilaan aiheenhallintaa. Harjoituksessa 12 on runsaasti tilaa piirtämiselle ja kirjoittamiselle. Tila on tarkoituksella aivan valkoinen ilman apuviivoja tai muita ohjaavia kuvioita. Harjoituksen 13 vastaukseksi voidaan odottaa erilaisia oivalluksia. Etenkin pohdintaosa harjoituksessa antaa tilaa oppilaalle omille mielipiteillekin.

Harjoitus 13
Osaat varmasti kirjoittaa murtolukuna yksi kahdesosa ($\frac{1}{2}$, ”puolikas”).

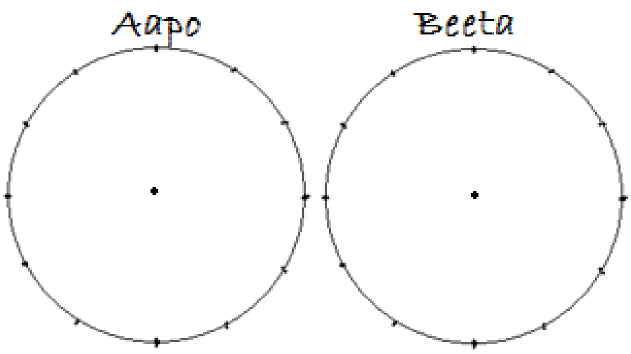
Onko mahdollista merkitä puolikas kolmasosina? $\frac{\ }{3}$
Miten sanoisit luvun?____

Mitä outoa luvussa on? Mitä ajattelet siitä? ______________________________________

Harjoitus 12
Keksi esimerkkejä, joissa käytät lukua $\frac{3}{4}$?
Voit piirtää ja kuvittaa. Voit käyttää apuna vuoropuhelua, sarjakuvaa, matemaattista perustelua.

Toisen tunnin orientoiva harjoitus, Harjoitus 1, on lämmittelyä supistamiselle. Ajatuksena on, että oppilas voisi oivaltaa samankokoisia ympyröitä jakaessaan, miten supistaminen näkyy piirroksessa. Harjoituksen osassa g oppilas saa jälleen kirjoittaa havaintojaan.

Harjoitus 1 (II tunti)
a) Jaa Aapo ja Beeta kolmeen yhtä suureen osaan.
b) Jaa Aapon osat vielä kahteen yhtä suureen osaan.
c) Väritä Aaposta ja Beetasta kaksi kolmasosaa haluamallasi värillä.



d) Molemmat voidaan ilmaista murtolukuna $\frac{\square}{\square}$

f) Aapo voidaan ilmaista myös $\frac{\square}{\square}$ murtoluvulla

g) Jos ensin on Aapo ja sitten Beeta. Mitä Beetan osoittajalle ja nimittäjälle tapahtui?

____

h) Tätä kutsutaan matematiikan sanoin ___________________________.

Teoriaosuus käydään toisella tunnilla läpi jälleen oppilaiden ja opettajan vuoropuheluna. Myös tällä kertaa oppilailla on tilaa tehdä oivalluksia. Se, että supistaminen ilmaistaan vuoropuhelussa kirjaimin, auttaa varmasti joitakin oppilaita laskutoimitusten ääneen lausumisessa. Tarkoituksella teoriaosuuteen on kirjoitettu luvut sekä symbolikielellä että luonnollisella kielellä.

Miksi tällaista tehdään??

Matematiikassa on tapana ilmaista murtoluku yksinkertaisimmassa muodossa. Toisin sanoen sekä osoittaja että nimittäjä ovat mahdollisimman pieniä kokonaislukuja.

$\frac{^{3)}6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$ *Luetaan: Kuusi yhdeksäsosaa supistettuna kolmella on yhtä suuri kuin kaksi kolmasosaa.*

Hyvin usein puhekielessä "on yhtä suuri kuin" korvataan sanalla "on"!

Supistamisessa kannattaa miettiä, minkä luvun kertotaulusta sekä osoittaja että nimittäjä löytyvät. Esimerkissä luvut kuusi (6) ja yhdeksän (9) löytyvät kolmen (3) kertotaulusta. Usein näissä laskuissa jätetään jakolaskun välivaihe merkitsemättä, kuten seuraavassa havaitset.

$\frac{^{2)}8}{14} = \frac{4}{7}$ *Luen: Kahdeksan neljästoistaosaa supistettuna kahdella on neljä seitsemäsosaa.*

Supistamisen voi tehdä myös vaiheittain - monta kertaa peräkkäin.
Kokeillaan esimerkiksi: $\frac{^{2)}24}{36} = \frac{^{3)}12}{18} = \frac{^{2)}4}{6} = \frac{2}{3}$

Saman supistuslaskun olisi voinut tehdä käyttäen suoraan supistajaa 12!

Hienosti päättelit!

Toisen tunnin viimeinen tehtävä on haastava sekä matemaattisesti että kielentämisen näkökulmasta. Oppilaalta ei odoteta vain muutamaa lukua tyhjään tilaan, vaan oppilaan tulee myös selittää, miten hän ratkaisuun päätyy. Tehtävän tarkoitus on olla myös ylöspäin eriyttävä haasteellisuutensa takia.

Harjoitus 6
Serkukset Minna ja Maisa tapasivat kesälomalla mummolassa. Minna kertoi, että heidän luokallaan oli 35 oppilasta. Tyttöjen osuus oli 21. Maisa kävi pientä kyläkoulua ja heidän luokallaan oli 15 oppilasta, joista 10 oli tyttöjä.
Kumman luokalla on suhteessa enemmän tyttöjä?
Selitä kirjoittamalla, miten ratkaisit. Voit myös piirtää.

Kolmannen tunnin kokonaisuus liittyy laventamiseen. Tunnin teoriaosuutta käydään läpi sekä vuoropuheluna että selittämällä. Teoriaosuuteen on liitetty mukaan myös kertotaulukuvat, joiden tehtävänä on osoittaa oppilaalle, että kertotaulun hallinnasta on hyötyä myös murtolukulaskuja tehdessä. Monelle oppilaalle voi olla vaikea ymmärtää, mistä yhteinen nimittäjä voidaan löytää ja miten luvut liittyvät toisiinsa. Konkreettisen mallin avulla oivaltaminen voi helpottua.

Jotta voisimme vertailla murtolukuja keskenään, meidän pitää löytää yhteinen nimittäjä molemmille murtoluvuille. Toisin sanoen tarvitaan yhteinen nimittäjä, joiksi molemmat murtoluvut voidaan laventaa. Verrataan lukujen 3 ja 4 kertotauluja keskenään.

Luvun 3 kertotaulu							
$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$3 \cdot 3$	$4 \cdot 3$	$5 \cdot 3$	$6 \cdot 3$	$7 \cdot 3$	$8 \cdot 3$
3	6	9	12	15	18	21	24

Luvun 4 kertotaulu					
$1 \cdot 4$	$2 \cdot 4$	$3 \cdot 4$	$4 \cdot 4$	$5 \cdot 4$	$6 \cdot 4$
4	8	12	16	20	24

Ensimmäinen yhteinen luku on 12. On myös mahdollista käyttää lukua 24, mutta se ei ole niin käytännöllistä.

$4 \cdot 3 = 12$, niin $\frac{1}{3}$ lavennetaan neljällä (4) ja $3 \cdot 4 = 12$, niin $\frac{1}{4}$ lavennetaan kolmella (3).

$${}^{4)}\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{4}{12} \qquad {}^{3)}\frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12}$$

Koska nyt molemmat luvut ovat kahdestoistaosia, niin $\frac{4}{12} > \frac{3}{12}$.

Siis $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. *Yksi kolmasosa on suurempi kuin yksi neljäsosa.*

Edellisessä esimerkissä käytettiin ***"ristiinlaventamista"***. Toisin sanoen lavennettiin toinen murtoluku toisen murtoluvun nimittäjällä ja toisinpäin.

Teoriaosuuden tietoa tarvitaan esimerkiksi Harjoituksessa 6, jossa vastaajan ei tarvitse tehdä yhtään laskutoimitusta. Tiedon hallinta esitetään täysin kielentämällä. Oppilas voi siten osoittaa teoria-osuuden hallinnan kirjoittamalla omin sanoin oppimansa. Tässä harjoituksessa oppilas ei pääse mekaanisesti näyttämään, miten hän *dopy-paste*-menetelmällä osaa sijoittaa lukuja, vaan osaaminen osoitetaan kielentämällä.

Harjoitus 6
Keksi ja kirjoita ohje, miten löydät helposti yhteisen nimittäjän.

Neljännen tunnin harjoitukset kokoavat murtolukulaskemista. Teoriaosuudessa mietitään kokonaisen problematiikkaa sekä sekalukuja ja murtolukuja. Orientoiva tehtävä on osa teoriaa ja oppilas täyttää teorian puuttuvat tiedot edetessään tekstiä eteenpäin. Harjoitusten tarkistusten myötä niiden järjestys muuttui. Testiryhmässä olleet oppilaat saivat järjestää neljännen harjoituksen jälkeen harjoitukset mielenkiinnon mukaan. Alkuperäinen järjestys muuttui kovin, mutta lopputuloksena oli vaihtelevampi opetusmateriaali.

Orientoivassa harjoituksessa (Harjoitus 1, IV tunti) oppilas osallistuu teorian kirjoittamiseen. Hän vastaa kysymyksiin järjestyksessä ja rakentaa oppimista vanhan opitun päälle. Harjoituksessa käytetään myös valmiita kappaleita, joiden avulla oppilas näkee konkreettisesti työpöydällään, miten luvut muodostuvat ja millaisia osia murtoluvussa on. Harjoitus on varsin helppo viidesluokkalaiselle, mutta teorian tukena se osoittaa paikkansa.

Harjoitus 1 (IV tunti)
Kuinka monta $\frac{1}{3}$ pitää ottaa, että saadaan kokonainen kakku? ____ osaa.
(Ryhmätyö, jossa käytetään valmiita kolmasosia. Opettaja jakaa oppilaille (n.3-4 hlö/ryhmä).

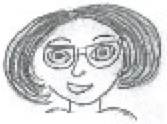
Jos osia olisi **7**:
Kuinka monta kokonaista saadaan koottua? ___ Kuinka monta osaa jää yli? ____

Voitaisiinko koko luku ilmoittaa kolmasosina?

Kyllä voidaan. Se olisi $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

Jos osia olisi **11**?
Kuinka monta kokonaista saadaan koottua? ___ Kuinka monta osaa jää yli?____

Täydennä myös: $\frac{11}{3} = \frac{\quad}{\quad}$



$\frac{11}{3}$ on *murtoluku* ja $3\frac{2}{3}$ on nimeltään *sekaluku*.
Laskutoimitusta kutsutaan ***murtoluvun muuttamista sekaluvuksi***.

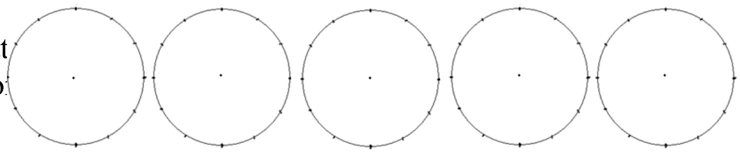
Harjoituksessa 2 oppilas pääsee jälleen kirjoittamaan. Harjoitus on tärkeä, koska oppilas hallitessaan tehtävän selittää huomionsa ja osoittaa, miten hän muuntaa murtoluvun sekaluvuksi. Kun taito on ajatuksen tasolla selkeä, niin oppilas osaa soveltaa tietoa kaikkiin lukuihin.

Harjoitus 2
Mitä kannattaa huomioida, kun muuntaa murtolukua sekaluvuks?________________________

____

Ylöspäin eriyttäviä tehtäviä on neljännen tunnin materiaalissa runsaasti. Oppilas, jolle murtolukulaskeminen tuntuu helpolta, pääsee kokeilemaan käytännössä, miten laskeminen onnistuu erilaisissa tilanteissa. Harjoituksissa on pyritty esittämään lapsille tuttuja tilanteita keksimättä liikaa elementtejä, jotka eivät liity harjoitukseen. Harjoitusten ratkaisemiseen liittyy aina sanallista kirjoittamista. Selittäminen on tärkeä osa oppimista. Tästä esimerkkinä harjoitus 5. Alun perin harjoituksen "työtilasta" puuttuivat valmiit ympyrät, eli pitsat, mutta ne lisättiin materiaaliin, koska testiryhmän oppilaiden toiveena oli saada helpotusta. Valmiita pitsoja hyödyntämällä oppilas voi myös tarkistaa suurin piirtein sen, saiko hän oikeasuuntaisen vastauksen tehtävästä.

Harjoitus 5
Viisi kaverusta oli ulkoilemassa. He päät
kymmenen (10) pitsan tarjous. Kaveripo
pitsaa kaksi (2) samanlaista.



Pitsapaloja **jäi yli** seuraavasti:
$\frac{3}{5}, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, \frac{3}{4}$

Kuinka paljon pitsaa jäi yli kokonaisuudessaan?
(Piirrä, kirjoita ja selitä, miten toimit, jotta voit ratkaista tehtävän.)

3.3 Metodologia ja mittarit

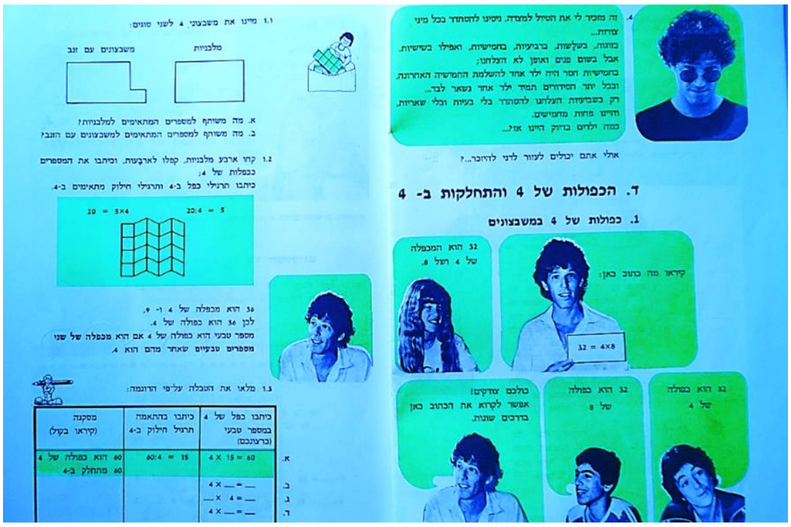
Metodin valintaan vaikutti se, että tutkimusta toteutti vain yksi henkilö. Resurssit ja aika piti huomioida. Näppärimmäksi keinoksi valikoitui *kyselylomake*, jonka sisältö ja ulkonäkö pyrittiin luomaan kiinnostavaksi ja houkuttelevaksi viidesluokkalaiselle lapselle. Sopiva määrä rastittavia hymiö-kuvia ja ei liian monta avointa kysymyskohtaa. Toinen menetelmä kerätä tietoa oli *tuntiseuranta* ja siitä tehdyt muistiinpanot. Muistiinpanoihin päädyttiin, koska nauhoittamalla tai kuvaamalla oppilaiden ääntä ei olisi saatu kuuluville ja kirjoittaminen olisi välttämätöntä kuitenkin. Tutkimuksen tekijä on kirjoittanut paljon tilanneselvityksiä ja tapahtumaraportteja, joten pikakirjoitus muistiin-panovihkoon tuntui luontevalta. Kolmas aineisto kerättiin *oppilaiden antamista palautteista* jokaisen oppitunnin jälkeen. Oppilaat saivat kolmen ensimmäisen tunnin jälkeen palautelomakkeen, johon kertoivat mietteitään tunnilla käytetystä materiaalista ja tehtävistä. Näistä vastauksista saatiin paljon materiaalia. Palautelomakkeiden vastauksista osa pystyttiin luokittelemaan kvantitatiivisesti ja avoimet vastaukset käsiteltiin osin kvalitatiivisesti ja osin kvantitatiivisesti. Neljäs materiaali koostui *oppilaiden huomautuksista ja kommenteista* valmistuneen opetusmateriaalin sivuilla. Oppilaat saivat ohjeen kirjoitella mietteitään ja ajatuksiaan tehtävien toimivuudesta monisteeseen, joka kerättiin tuntien jälkeen. Näitä monistenippuja oli neljä, jokaiselta tunnilta omansa. (Vainionpää 2006.)

Toimintatutkimusta voidaan käyttää myös yhtenä osana laadullista tutkimusta. Toimintatutkimuksen toimivuus laadullisissa tutkimuksissa ei kuitenkaan ole aina lainkaan perusteltua. Jos toimintatutkimusta käytetään laadullisen tutkimuksen osana, niin silloin on tärkeää huomioida se, että käytetty prosessi ja sen tuottama tulos sopivia laadullisen tutkimuksen aineistoksi. Toimintatutkimus toimii paremmin kriittisen teorian näkökulmasta. (Tuomi & Sarajärvi 2009, 40–41.) Itse ajattelen, että eräällä tavalla myös prosessinomainen opettaminen ja siitä kerättävä aineisto sisältää toimintatutkimuksen elementtejä. Tutkijana olen oppilaiden joukossa ja neuvoin ja autoin sekä ohjasin matematiikan tehtävien suorittamisessa.

Mittareina käytettiin keskiarvoa ja frekvenssiä.
Tutkimus oli kvalitatiivinen, koska tutkimusaineisto oli varsin pieni (n=22) ja haastateltavilta haluttiin omin sanoin tuotettuja vastauksia, joissa ilmenisi mahdollisesti uusia ajatuksia. Aineisto pyrittiin koodaamaan numeeriseen muotoon, kun sellaisen havainnollistaminen toi lisäarvoa tutkimustuloksissa. Raportissa onkin käsitelty vain muutamia frekvenssejä. (Tuomi 2007, 95–96.)

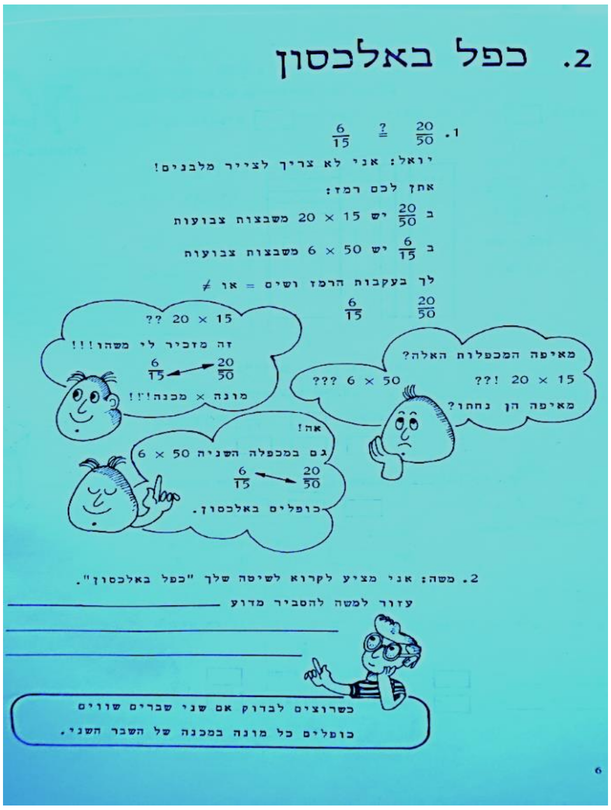
3.4 Tehtävien synnystä

Murtolukujen uusien tehtävien kehittäminen perustuu vanhoihin Israelissa käytettyihin matematiikan kirjoihin. *”Cheshbon pashut”* (=Yksinkertaista matematiikka) oli yleisesti käytetty matematiikan oppikirja 1980-luvulla. Kirjoista mallintamalla huomasin, että niissä käytettiin paljon kielentämistä ja oivaltamisella oli merkittävä osa. Tehtävät etenivät nopeasti varsin yksinkertaisista harjoituksista vaikeisiin laskutoimituksiin ja käytetyt luvutkin kasvoivat suuriksi. Pelkällä päässälaskulla ei enää pärjännyt viimeisissä tehtävissä.



KUVIO 4. Oppikirjan aukeama, jossa käydään läpi 4 kertotaulua. (Rainer n.1980)

Murtolukujen kielentämisen tehtävissä pyrin toteuttamaan mallia, jossa oppilas pystyi rakentamaan oppimaansa tietoa vanhan tiedon päälle. Oivaltamisen kautta uusi tieto voitiin ilmaista jo haastavampia lukuja käyttäen. Oppilaiden taitotasot tulevat esille tehtävien suorittamisen määrässä. Teoria siis etenee tehtävien lomassa ja se on myös esitetty pitkälti puheenvuoroja käyttäen. Näin oppilas voi samaistua keskustelijoihin ja kysyä myös itseltään materiaalissa esiintyvien lasten esittämiä kysymyksiä ja toistaa näiden toistamia oivalluksia.



KUVIO 5. 5.-luokka-asteen harjoituskirjan B toisesta kappaleesta, jossa harjoitellaan murtolukuyhtälöitä. (Rainer 1980-luvulla)

Murtolukujen kielentämisen tehtävissä pyrin myös huomioimaan uuden opetussuunnitelman ajatuksen siitä, että opettaja toimii oppilaan ohjaajana oppimisprosessissa ja oppilas itse tekee työtä oppimisen suhteen. Tehtävissä oleva teoria sisältää ne asiat, jotka oppilaan tulisi omaksua ja harjoituksissa oppilas itse tuottaa tietoa, jonka sisällöstä opettaja voi nähdä, miten oppilas on omaksumansa tiedon sisäistänyt.

”*Oppimisprosessistaan tietoinen ja vastuullinen oppilas oppii toimimaan yhä itse-ohjautuvammin. Oppimisprosessin aikana hän oppii työskentely- ja ajattelutaitoja sekä ennakoimaan ja suunnittelemaan oppimisen eri vaiheita. Jotta oppilas voisi oppia uusia käsitteitä ja syventää ymmärrystä opittavista asioista, häntä ohjataan liittämään opittavat asiat ja uudet käsitteet aikaisemmin oppimaansa. Tietojen ja taitojen oppiminen on kumuloituvaa ja se vaatii usein pitkäaikaista ja sinnikästä harjoittelua.* (Opetussuunnitelman perusteet 2014, 15.)”

Tehtäviin innoittavissa kirjoissa teoriaosuuksien keskustelevat hahmot ovat luonnollisia ihmisiä, joiden ilmeet kertovat, milloin ihminen kysyy ja milloin hän oivaltaa tai tokaisee asioita. Hahmot ovat todellisia ihmisiä, jotka seikkailevat tehtäviä myötäilevissä television opetusohjelmissa. Opettajan roolia hoitaa Dani, joka on jo aikuinen ja näin lapset katsovat häntä ylöspäin. Danilla on ideoita ja oivalluksia ja hän ohjaa lapsia ymmärtämään ja keksimään itse ratkaisuja erilaisiin matemaattisiin pulmiin. Sanoittaminen, eli kielentäminen, tulee luontevasti näkyviin kuvien vieressä olevissa puhekuplissa.

Tässä tekemässäni materiaalissa todellisten hahmojen käyttämiselle ei löytynyt mielekästä syytä. Pyysin erästä yläkoululaista oppilasta piirtämään hahmot, jotka voisivat toimia keskustelijoina keskenään. Hahmojen tuli olla mahdollisimman neutraaleja ja inhimillisiä, mutta eivät kuitenkaan todellisia ihmisiä. Näin syntyivät opettajan, tytön ja pojan kuvat. Omassa materiaalipaketissa hahmoilla ei ole nimiä lainkaan. Tulevaisuudessa on toki mahdollista, että tehtävien rinnalle voitaisiin kehittää näyteltyjä matemaattisia pulmia, joita oppilaat voisivat itse näytellä luokassa matematiikan tuntien aikana. Oivaltaminen voi syntyä silloin draaman keinoin.

> *”Kaikkien opettajien tehtävänä on ohjata oppilasta oppiaineiden opiskelussa, auttaa oppilasta kehittämään opiskelun ja oppimisen taitoja sekä ehkäistä ennakolta opintoihin liittyvien ongelmien syntymistä. Ohjaus tarkoittaa myös oppilaan itseluottamuksen, persoonallisen kasvun ja kehityksen sekä osallisuuden tukemista. Jokaisella oppilaalla on lain mukaan oikeus saada koulun työpäivinä ohjausta.”*
>
> (http://www.oph.fi/koulutus_ja_tutkinnot/perusopetus/oppilaan_tukeminen/oppilaan_ohjaus)

> *”Uudistuksen keskeisinä tavoitteina on vahvistaa oppilaan aktiivisuutta, lisätä opiskelun merkityksellisyyttä ja mahdollistaa onnistumisen kokemukset jokaiselle oppilaalle. Lapsia ja nuoria ohjataan ottamaan vastuuta opiskelustaan ja jokaista oppilasta tuetaan opinnoissaan. Oppilas asettaa tavoitteita, ratkaisee ongelmia ja arvioi oppimistaan tavoitteiden pohjalta. Oppilaan kokemukset, tunteet, kiinnostuksen kohteet ja vuorovaikutus toisten kanssa luovat pohjaa oppimiselle. Opettajan tehtävänä on opettaa ja ohjata oppilaita elinikäisiksi oppijoiksi ottamalla huomioon oppilaiden yksilölliset tavat.”*
>
> (http://www.oph.fi/koulutus_ja_tutkinnot/perusopetus/opetussuunnitelma_ja_tuntijako/uudet_opetussuunnitelmat_pahkinankuoressa)

4 VIIDESLUOKKALAISTEN MIELIKUVIA MURTOLUKULASKUISTA KEVÄÄLTÄ 2017

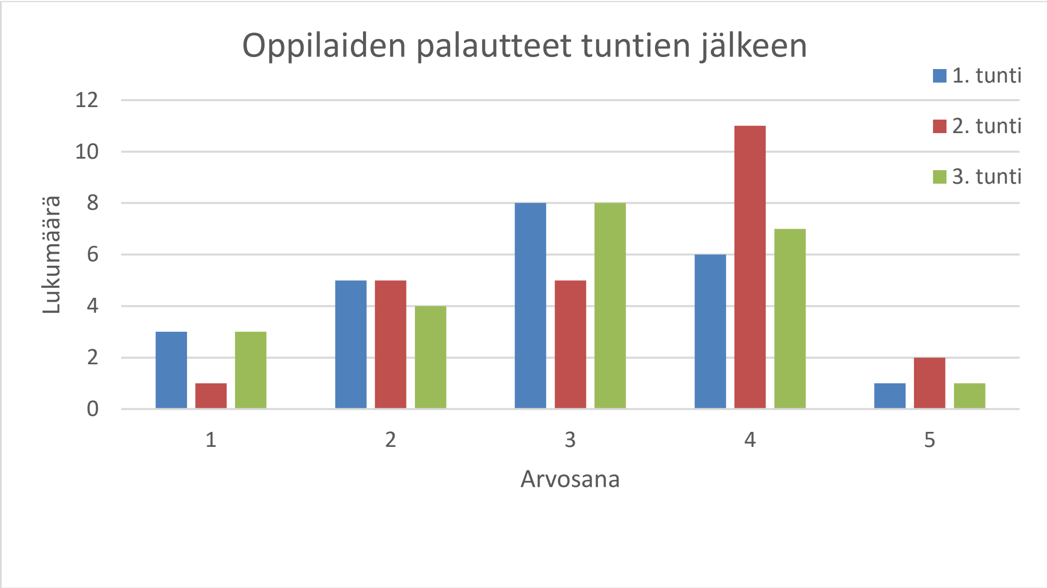
Toukokuussa 2017 testiluokan oppilaat kertoivat mielipiteitään murtolukulaskuista. Oppilaat osallistuivat tuottamani murtolukutehtävien läpikäymiseen ja kommentoimiseen. Samalla oppilailta kerättiin tietoa heidän omista mielipiteistään murtolukujen käyttöön ja osaamiseen. 22 oppilaalta tuli lupa vastausten käyttämiseen tutkimustarkoituksessa. Alkukysely toteutettiin ennen ensimmäistä murtolukutuntia, joita oli neljä kappaletta. Oppilaat vastasivat sen tuntuman mukaan, joka heillä oli juuri sillä hetkellä. Loppukysely toteutettiin välittömästi neljännen tunnin päätteeksi.

4.1 Alkukysely ja loppukysely toukokuussa 2017

Alkukyselyssä oppilas sai ilmaista oman käsityksensä ja mielikuvansa sekä murtolukulaskuista että omasta osaamisestaan riippumatta siitä, mikä osaaminen todellisuudessa oli. Alkukyselyn yhteydessä oli myös yksisivuinen testi, jossa kartoitettiin oppilaiden sen hetkinen murtolukujen osaaminen. Loppukyselyssä kysymykset olivat osin samoja ja osin poikkesivat. Testi, jonka oppilaat tekivät ennen ensimmäistä tuntia, pysyi täysin samana myös loppukyselyn yhteydessä.

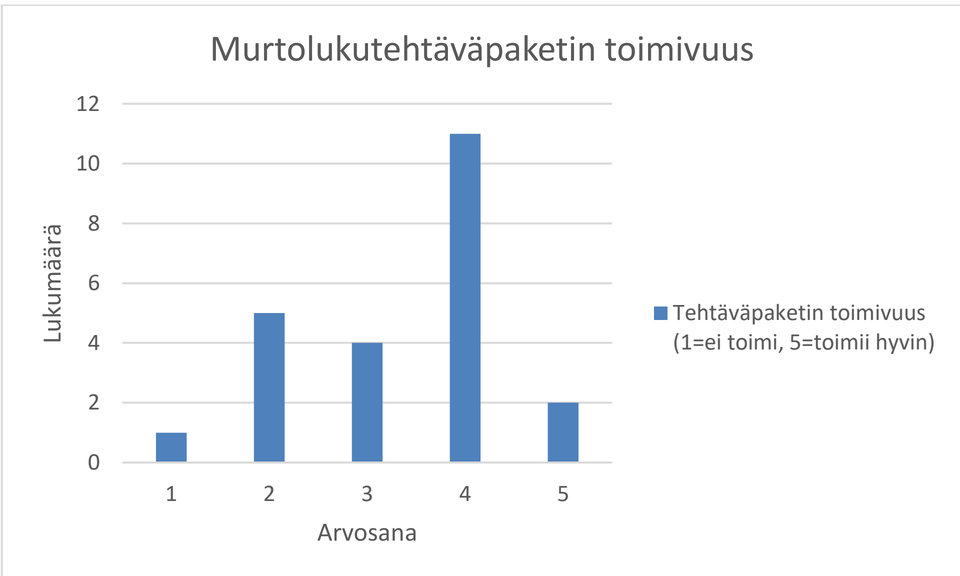
Oppilaat vastasivat väittämiin ympyröiden tai rastittamalla viisiportaista hymiösarjaa, joka muutettiin numeroiksi 1–5 kirjaamisen vaiheessa. 1 oli suuri surunaama ja 5 isolla hymyllä oleva hymiö. Hymiöiden käyttöä kyselykaavakkeessa tuki ajatus, josta tutkija Katri Saarikivi myös mainitsee. Hymiöt ovat yhtenä osana chat-kulttuuria, johon kuuluvat hymiöiden lisäksi emojit ja gif-animaatiot. Näillä kuvilla kierretään netin tunnevajetta, koska kirjoittamalla ei pystytä ilmaisemaan niin hyvin mielialoja ja tunteita. (Pinola 2017.)

Jokaisen tunnin jälkeen oppilaat kertoivat, mitä mieltä olivat senkertaisesta tehtäväosiosta. He rastittivat hymynaaman ja kirjoittivat lisäksi sanallista vastausta. Kolmen ensimmäisen tunnin jälkeen oppilaiden antaman arvosanan perusteella koko luokan keskiarvot vaihtelivat ensimmäisen tunnin 2,9 toisen tunnin 3,3 ja kolmannen tunnin 2,9. (1=tylsä/huono ja 5=todella hyvä.)



KUVIO 6. Loppukyselyssä kerättyjen oppilaiden palautteiden jakautuminen. Arvioitavana oli tehtävien toimivuus.

Oppilaiden mielikuvat tehtävistä vaihtelivat jokaisen oppitunnin jälkeen, minkä vuoksi tutkijan on hyvä ajatella, että oppilaat vastasivat vilpittömästi ja aidosti. Merkittävin ero oli toisen ja kolmannen tunnin välillä. Kolmannen tunnin jälkeen oppilaat antoivat useammin arvosanan 3 kuin 2. Toisaalta arvosanaa 4 annettiin vähemmän kolmannen tunnin jälkeen kuin toisen tunnin jälkeen. Neljännen tunnin jälkeen oppilaat eivät enää vastanneet suoraan samaan kysymykseen, joten vastausten vertailua kolmannen ja neljännen tunnin välillä ei enää voida tehdä. Neljännen tunnin arvio annettiin loppupalautteen yhteydessä ja siinä oppilaat antoivat palautetta kaikista neljästä tunnista, eli koko opetusmateriaalista. Yksittäisenä kokonaisuutena ei neljättä tuntia siten arvioitu.



KUVIO 7. Oppilaiden palaute koko opetusmateriaalin toimivuudesta.

Yli puolet oppilaista oli sitä mieltä, että opetusmateriaali toimii hyvin tai tosi hyvin. Vain yksi vastaaja piti sitä toimimattomana. Vaikka kolmen ensimmäisen tunnin jälkeen annettujen arvosanojen keskiarvo tehtävien onnistumisesta ei ollutkaan kovin korkea, niin kaikkien tehtävien osalta yhdessä kokonaiskeskiarvosana koko luokalta oli 3,35.

Mielikuva-arvosana murtoluvuista ja murtolukulaskuista oli ennen ensimmäistä tuntia 3,7 (1=huono, 5=hyvä). Neljän tunnin jälkeen oppilaiden mielikuva-arvosana murtoluvuista oli enää arvoa 3,2. Tämä osoitti mielestäni, että monet oppilaat kohtasivat ehkä liian suuria haasteita ja mielikuva heikkeni. Oppilaan ajatus siitä, miten hyvin hän itse hallitsee murtoluvut, heikkeni myös neljän tunnin jälkeen. Arvosanat olivat ensin 3,7 ja lopussa 3,4. ”Ymmärrän täysin, mitä murtoluvuilla tarkoitetaan”, heikkeni alun 3,9:sta lopun 3,4:een. Murtolukujen käytännöllisyydestä kysyttäessä oppilaat vastasivat ensin arvosanalla 3,5 ja lopussa 3,2.

Oppilaiden vastausten perusteella sekä opetusmateriaalissa olleiden palautteiden perusteella voitaisiin ajatella, että oppilaat olivat saaneet lisää tietoa ja sen takia myös käsitys omasta osaamisesta ja käsityksestä muuttui. Se, että kaikki arvot olivat loppukyselyssä heikompia kuin alkukyselyssä herättää toki ajatuksia. Kaksi oppilasta antoi korkeamman arvion omasta murtolukujen hallinnasta loppukyselyssä. Muilla oli joko sama kuin alussa tai heikompi arvio. Kuusi oppilasta kertoi ymmärtävänsä murtolukuja paremmin neljän oppitunnin jälkeen. Murtolukujen käytännöllisyydestä kolmella oppilaalla oli lopussa parempi käsitys kuin alussa. Kahden viimeisen kyselykohdan perusteella voidaan päätellä, että ainakin oppilaan itsensä käsitys osaamisestaan ja murtolukuhallistaan parantui kuuden oppilaan kohdalla.

Alkukyselyssä ja loppukyselyssä avoimet kysymykset poikkesivat toisistaan. Projektin alussa oli tarkoitus kartoittaa, miten oppilaat vastaavat murtolukuasioihin omilla sanoillaan ja miten he suhtautuvat teemaan yleensä. Viisi oppilasta ei vastannut kumpaankaan kahdesta avoimesta kohdasta. Oppilaiden vastaukset on koottu seuraavaan:

TAULUKKO 1. ”Murtolukulaskuissa minua on jäänyt mietityttämään…**”** (11 tyhjää) n=20

EOS	**Vastaus ei liity murtolukuihin**	**Epäsuora kysymys**	**Yksityiskohtaisempi maininta**
Ei mikään	jotain	miksi on murtolukuja	laventaminen
Ei mikään	allekkain laskut	miten ihmeessä näitä tehdään	
Ei mikään			
Ei mikään			

TAULUKKO 2. ”Elämä ilman murtolukuja olisi…” (6 oppilasta jätti tyhjäksi.) n=20

”Helpompi”	**”samanlainen”**	**”vähän vaikea”**	**”enemmän vaikea”**	**”muu mielipide”**
yksi aine vähemmän	samanlaista kuin nyt	vähän vaikeampaa	vaikeaa, sillä on haasta-vaa elää ilman kunnol-lista mittayksikkölistaa	erilaista
helpompaa	samanlaista kuin nyt	hieman vaikeampaa	vaikeaa	
parempi	normaalia	vähän vaikeaa		
	normaalia			
	ei varmaan minun elämääni muuta			

Viiden oppilaan vastauksista nousee ajatus, että murtoluvut kuuluvat arkeen ja niiden puuttuminen hankaloittaisi enemmän tai vähemmän elämää. Kahdeksan oppilaan vastaukset osoittavat, että oppilaat eivät näe murtoluvuilla mitään tarkoitusta ja niiden puuttuminen ei muuttaisi mitään.

Loppukyselyssä avoimet kysymykset kohdistuivat läpikäytyihin murtolukuharjoituksiin. Tällaiseen matematiikan opiskeluun suhtauduttiin sekä positiivisesti että negatiivisesti. Kaksi jätti vastaamatta.

TAULUKKO 3. ”Tällainen matematiikan opiskelu on…” n=20

Perustelu	Positiivinen	Vaikeus	Neutraali	Negatiivinen
Semmosta, jossa mietitään enemmän oikean elämän kannalta.	Kiinnostavaa	Vähän vaikeita	Ihan ok, ei mikään lemppari	Tylsää
Kehittävää ja opettavaa, mutta siitä puuttuu tietty järjestelmällisyys.	Hauskaa	Ihan hyvä, mutta jotkut jutut vähän vaikeita ymmärtää	Ihan ok	Tylsää
Erilaista ja kivaa, koska tehtäviä on monia eri tyyppisiä.	Erilaista	Haastavaa	Ihan kivaa	Minun mielestä ei niin käytännöllistä.
Mukavaa ja käytännöllistä			Joskus hauskaa, joskus ei ja kuvat olivat outoja.	Aika tylsää, koska niitä ei ymmärrä.
			Mielestäni välillä kivaa	Outoa, tylsää, ei niin kivaa

Viimeisenä oppilaat saivat antaa palautetta opetusmateriaalista, jotta niitä saatettiin kehittää ja parantaa sellaiseen muotoon, että ne olisivat mahdollisimman toimivat.

TAULUKKO 4. ”Uudet murtolukutehtävät toimisivat paremmin, jos…” n=20

Nyt hyvä	Ehdollisesti hyviä	Ei sanottavaa	Osaaminen ongelmana
Nykyiset tehtävät ovat hyviä	Jos ne eivät olisi sanallisia	eipä tuu mitään mieleen	Jos osaisin
Juuri noin	yläkoulussa	en tiedä	En osaa näitä tehtäviä.
Kyllä minun mielestäni	mekaanisia jos olisivat	en tiedä/osaa selittää	
	harjoitteluita	en tiedä	
	lisätehtäväosassa ja lisätehtävissä ja normitehtävissä		

Oppilaiden vastauksista näkyy keskimääräinen tyytyväisyys. Kaksi vastaajaa (OP4 ja OP21) jäi neljän tunnin jälkeenkin sellaiseen mielikuvaan, etteivät hallitse tehtäviä.

Hymiökysymykseen, jossa todettiin: ”Vanha oppikirjamalli toimii mielestäni paremmin”, antoi liki yksimielisen tuloksen 4,2. Heikoinkin arvio oli neutraali hymiö. Tällainen vastaaminen osoittaa, että oppilaat tutustuivat mielellään uuteen tapaan opiskella, mutta vanha tuntui turvalliselta ja varmalta.

4.2 Testi murtolukuosaamisesta

Testi (Liite 3), jonka oppilaat tekivät alku- ja loppukyselyiden yhteydessä, oli nimetty ”pieneksi kertaukseksi”. Siinä oli murtolukuja eri muodoissa ja tehtäviä, joissa oppilas saattoi osoittaa osaamistaan murtolukusanaston hallinnasta. Kertaustestin arviointi oi haastavaa, koska kovin moni oppilas ei suoriutunut läpäisyperiaatteenkaan tasolla testistä. Viiden oppilaan testiä ei voinut arvioida lainkaan vastaamattomuuden takia tai vain hatarien merkintöjen tähden. Arvioitujen kokeiden merkinnät osoittavat, millä tasolla oppilas oli murtolukujen hallinnan kohdalla, kun vertailukohtana oli viidennen luokan osaamistavoite (Opetussuunnitelman perusteet 2014).

Testissä kysyttiin murtolukuihin liittyviä perustoimituksia. Läpi päästäkseen oppilaan olisi pitänyt hallita murtoluku, sekaluku, laventaminen ja vähennyslasku samannimisillä luvuilla. Osoittaakseen laajempaa osaamista oppilaalta odotettiin taitoa selittää osoittaja, kertoa, miten eri nimittäjillä esitetyt luvut eroavat toisistaan ja osoittaa kirjoittamalla sanallisesti, mitä murtoluku tarkoittaa sanallisen tehtävän vastauksena. Opetussuunnitelman tekstin 3–6 vuosiluokkien ohjeistuksen perusteella oppilaalta saattoi odottaa tehtävien hallintaa. Tehtävien osaaminen ei vaatinut syvempää murtolukujen hallintaa.

Se, että oppilaan arvioinnin tuloksena oli perushallinta, kertoo, että oppilas pystyi lyhyesti kertomaan mitä kaksi kolmasosaa voisi tarkoittaa, muuttamaan murtoluvun sekaluvuksi ja toisinpäin (pieni virhekin sallittiin), laventamaan seitsemäsosista neljästoistaosiksi sekä vajavaisesti selittämään osoittajan, erottamaan toisistaan erinimiset luvut ja antamaan yksinkertaisen selityksen neljäsosasta.

Alkeet-merkinnän saanut oppilas ei pystynyt sanallisiin vastauksiin ja horjuvuutta oli myös muissa vastauksissa. Oppilas jätti myös useamman harjoituksen tekemättä, mutta oli vastannut jotain vähintään puoleen kysymyksistä.

Oppilas, joka ”hallitsi” tehtävät, osasi peruslaskutoimitukset varmasti ja sanalliset vastaukset olivat pitempiä kuin yhden tai kahden sanan mittaisia tokaisuja. Aiheen hallitsevan oppilaan vastauksissa oli myös kuvia ja selitykset olivat loogisia. Aiheen hallitseva oppilas vastasi kaikkiin tehtäviin ja vastaukset olivat liki virheettömiä.

TAULUKKO 5. Viidesluokkalaisten ”Pienen kertauksen” tulokset:

	Alkuvaihe	**Loppuvaihe**	**parannusta?**
OP10	ei osaamista	nimittäjä ja osoittaja tiedossa	+
OP25	alkeet	alkeet	ei muutosta
OP3	alkeet /arvausta	alkeet /varmuus lisääntynyt	+
OP24	alkeet / vajaasti tehty	alkeet	+
OP9	alkeet	alkeet	+
OP20	ajatusta on, pienet virheet	ajatusta on	ei juurikaan
OP12	perushallinta	perushallinta	ei muutosta
OP4	perushallinta	perushallinta	ei muutosta
OP11	perushallinta	perustahallinta	ei muutosta
OP5	perushallinta	selitystä tullut lisää	+
OP1	perushallinta hyvä	sanallistaminen parantunut	+
OP14	hallitsee melkein	hallitsee melkein	ei muutosta
OP2	hallitsee melkein	hallitsee melkein	ei muutosta
OP24	hallitsee melkein	hallitsee /sanallistaminen parani	+
OP23	hallitsee melkein	hallitsee	+
OP7	hallitsee melkein	hallitsee	+
OP15	hallitsee	hallitsee	ei muutosta

Testin (Liite 3) arviointi pystyttiin tekemään vain 17 oppilaan kohdalla. Viideltä oppilaalta puuttuivat vastaukset tai testiin vastaaminen oli niin vaillinaista, ettei mitään arviointia oppialan osaamisesta pystytty tekemään. TAULUKOSSA 5 oppilaat on laitettu paremmuusjärjestykseen. Testin tulosten perusteella oppilaat eivät ainakaan heikentyneet murtolukuosaamisessaan. 9 oppilasta paransi neljän oppitunnin jälkeen testitulostaan ja erityisesti se, että oppilas, jolla ei ollut murtolukutuntien alussa mitään osaamista, osoitti jo orastavaa hallintaa. Neljän tunnin jälkeen voidaan todeta, että myös ne oppilaat, joilla osaamisen taso oli hyvää, pystyivät parantamaan osaamistaan. Sanallistaminen erityisesti parani niillä, joilla tuos alkutestissä oli parempi. Lopputuloksena oli se, että kolme oppilasta hallitsee murtolukulaskut opetussuunnitelman tavoitteiden mukaisesti (ks. teoreettinen viitekehys). Myös neljä oppilasta heikoimmasta päästä sai lisäosaamista murtoluvuista neljän tunnin aikana. Heidän murtolukuhallintansa ei kuitenkaan vielä yllä hyvään osaamiseen.

4.3 Pohdintaa kyselyiden pohjalta

Alku- ja loppukyselyiden (Liite 1 ja Liite 2) perusteella voisin ajatella, että tämän kaltaisella matematiikan opiskelulla voisi olla mahdollisuuksia, mutta vanhat tavat ja tottumukset ovat tiukassa viidesluokkalaisilla oppilailla. Neljä oppilasta mainitsi, että tämän kaltainen opiskelu on jopa tylsää. Koska vastaus oli niin monella, herää kysymys, millainen matematiikka olisi sitten mielenkiintoista? Mielenkiintoista vastauksissa oli myös huomata se, että kovin moni ajatteli, että hallitsee murtolukulaskuja mutta kertaustestissä (Liite 3) osaamisen osoittaminen kuitenkin ontui. Voisi myös päätellä, että oppilailla on selvästi alavireinen käsitys siitä, millä tasolla murtolukujen hallinnan pitäisi olla viidennen luokan keväällä.

Pohdinnan aihetta aiheuttaa myös se, että oppilailla oli selvästi haasteita vastata testiin, jossa käsiteltiin asioita, jotka he olivat käyneet läpi aikaisemmin keväällä normaalin matematiikan opetuksen mukana. Perinteinen matematiikan opetus ei selvästikään ollut saavuttanut kaikkien oppilaiden osaamista. Myöskään neljä lisätuntia eivät tuoneet kaikille oppilaille lisäosaamista ja aihepiirin hallintaa. Oppilaiden energiasta suuri osa meni uuden opetusmateriaalin arvioimiseen ja tutkimiseen. Varsinaiseen aiheeseen syventymiseen ei ollut palautetunneilla aikaa. Testiin osallistunut luokka oli kovin monitasoinen osaamiseltaan ja se, että harjoitukset saavuttaisivat jokaisen oppilaan, on vaikea tehtävä. Positiivista oli kuitenkin se, että oppilaat jaksoivat myöhäisestä kevään ajankohdasta huolimatta, osallistua ja auttaa projektissa. Mielestäni kevätaika ei kuitenkaan olisi saanut vaikuttaa osaamisen osoittamiseen noin vahvasti. Mikäli asia olisi ollut hallinnassa, oppilaiden osaamisen osoittaminen olisi ollut vahvempaa.

5 UUSISTA MURTOLUKUHARJOITUKSISTA KERÄTTYJÄ OPPILAIDEN AJATUKSIA JA VASTAUKSIA

Murtolukuharjoituksia tehtiin kahdella eri kantahämäläisellä koululla. Opetusmateriaalin numerointi muuttui ensimmäisen läpikäynnin jälkeen ja sen muotokin muuttui aika paljon. Kahden eri luokan vastauksia ei suoraan voi verrata toisiinsa, koska ensimmäisen testiryhmän tehtävä oli lukea kaikki harjoitukset sekä teoriatekstit ja kommentoida niitä. Heille ei jäänyt aikaa tehdä kaikkia harjoituksia. Heidän monisteissaan oli kommentteja siitä, millaisina he kokivat eri harjoituksia. Ensimmäinen ryhmä oli jo viidennen kouluvuoden lopulla, toinen ryhmä oli juuri aloittanut viidennen luokan. Jälkimmäinen tehtävät tehnyt ryhmä suhtautui opetusmateriaaliin kuten oppikirjaan, joka on opeteltavaa aineistoa. Tämä luokka ei vielä ollut käsitellyt murtolukuja kyseisen lukuvuoden matematiikan tunneilla, joten tilanne oli autenttisempi.

5.1 Neljän oppitunnin palautteet ja arvioinnit tehtävien toimivuudesta

5.1.1 Ensimmäisen testiryhmän kuvailu

Ensimmäinen tapaaminen aloitettiin kartoittamalla oppilaiden mielipiteitä murtolukumatematiikasta. Samassa kyselyssä oli myös yhdeksän erilaista murtolukuharjoitusta, joilla oppilaat saattoivat osoittaa murtolukujen hallintaansa. Kyselykaavakkeen täyttämiseen annettiin aikaa 25 minuuttia. Oppilaille painotettiin sitä, että he miettisivät huolella vastauksia ja pyrkisivät selittämään sanoin eri vastaukset mahdollisimman tarkasti. Kyselyssä annetut vastaukset osoittivat, että oppilaat osallistuivat mielellään kyselyyn ja tutkimukseen. Luokan vastausten keskiarvo oli 4,2, kun arviointiasteikko oli 1–5.

Kyselykaavakkeen täyttämisen jälkeen oppilaat saivat ensimmäisen oppitunnin materiaalipaketin. Ohje oli selkeä: Lue huolella materiaalipakettia eteenpäin ja pyri tekemään harjoitukset siinä järjestyksessä, kuin ne on opetusmateriaaliin tehty. Merkitse eri värillä sellaiset asiat, jotka ovat vaikeita ymmärtää, jollain muulla värillä ja kirjoita kommentteja tehtävien toimivuudesta.

Ensimmäisessä harjoituksessa tarvittiin neliön muotoista palaa. Se oli leikattu valmiiksi ja oppilaat saivat sen materiaalipaketin mukana. Taittelu tuntui kiinnostavan viidesluokkalaisia kovin. Joillakin oppilailla meni kymmenen minuuttia taitellessa. Paperia taiteltiin laidasta laitaan ja taas puoliksi. Myös versio, jossa taiteltiin kulmasta kulmaan, toimi monilla. Yksi teki taitoksia useita ja taittoi neliön kulmat kohti neliön keskipistettä.

Harjoitukset tuntuivat mielekkäiltä. Luokanopettaja sanoi seurattuaan tuntia, että luokassa oli hyvä työilmapiiri ja sellainen ”tekemisen maku”. Muutamat oppilaat jättivät tehtäviä kotiin tehtäväksi, kun sellaiseen oli mahdollista. Pari tyttöä luovutti varhaisessa vaiheessa. Kysyin syytä. Syy oli se, että he eivät mielestään osaa matematiikkaa ja sen takia eivät voi myöskään ymmärtää tätä. Kävimme yhdessä teoriaosaa eteenpäin ja yllättävän hyvin tytöt oivalsivatkin asian.

Toisella tunnilla oppilaat olivat jo orientoituneet uuteen opetusmateriaaliin. Ennen sen aloittamista oppilaat vastasivat lyhyeen arviointilomakkeeseen ensimmäisen osan hyviä ja huonoja puolia. Opetusmateriaalin neljännen tunnin aloitimme yhdessä. Luimme tekstiä ääneen ja oppilaat vastasivat viittaamalla. Annoin erilaisia oikeita vastauksia sanalliseen tehtävään. Kun pääsimme opetusmateriaalissa kohtaan, jossa kuvailtu opettaja ja oppilas keskustelevat teoriaosuutta, oppilaat jatkoivat itsenäisesti. Luokassa oli jälleen hyvä työskentelyrauha. Pientä keskustelua tapahtui pöytäryhmissä, joissa jokaisessa oli kolmesta neljään oppilasta.

Tälle toiselle tunnille tuli myös edellisellä kerralla poissa ollut oppilas. Hän aloitti työskentelyn vasta toisen tunnin kanssa. Oppilaat tuntuivat edelleen työskentelevän huolellisesti. Tehtäviin liittyviä kysymyksiä pidettiin hyvinä ja muutamia korjausehdotuksia tuli.

Ensimmäisellä harjoituskerralla luovuttaneen oloinen tyttö oli edelleen sitä mieltä, ettei hänen kannata edes yrittää. Hänen kanssaan tein pohdintatehtävää yhdessä. Työskennellessäni tytön kanssa huomasin yrittämättömyyttä. Kun opettajana olin vieressä ja sanoitin tehtävää, tyttö työskenteli, mutta itse hän ei pystynyt etenemään tehtävässä lainkaan. Opetusmateriaaliin kirjoittamansa kysymysmerkit hän sanoi liittyvän siihen, ettei hän osannut. Tehtävä ei siten ollut huono, vaan tyttö ei pystynyt yrittämäänkään. Kysymyksessä ei ollut sellainen oppilas, joka olisi ollut erityisen tuen oppilas.

Kolmas oppitunti tapahtui liki viikko toisen tunnin jälkeen. Päivä oli maanantai ja kevätkauden viimeinen viikko alkoi. Poissa oli kolme oppilasta. Oppilaat olivat jo täysin tietosia, mitä tunnilla tulee tapahtumaan ja työskentely alkoi napakasti. Olin leikannut valmiiksi 1/3 ja ¼ ympyrämuotit, jotta oppilaiden ei tarvinnut ruveta leikkaamaan itse. Luokan kaikki sakset ja muut askarteluvälineet oli jo pakattu kesälaatikkoihin luokkaan tulevan remontin takia.

Erityisesti pojat keskittyivät kirjoittamaan palautetta. Ohjeeksi annoin tunnin alussa sen, että tärkeämpää on lukea tehtävänannot ja teoriaosuudet ja kommentoida niitä, kuin yrittää hieman kiireisellä aikataululla vastailla jokaiseen harjoitukseen. Muutamat oppilaat keskittyivät ohjeesta huolimatta laventamaan lukuja järjestyksessä. Yksi oppilas pyysi apua ja kertoi, ettei muista enää, miten lavennetaan, koska edellisestä oppitunnista oli viikko aikaa. Kysyin, oliko hän lukenut edellisellä sivulla olevan teoriaosan, jossa selitettiin laventaminen alusta alkaen. Ei. Poika palasi alkusivulle ja luki teoriaosan ja jatkoi sitten tehtäviin.

Luovuttanut tyttö istui jälleen tuijottaen kynsiään. Hän ei pystynyt edes yrittämään. Pyysin häntä kirjoittamaan ehdotuksia, miten hän haluaisi opetella murtolukuja. Hän oli kuitenkin läpäissyt jollain tapaa viidennen luokan matematiikan oppimäärän ja siihen kuuluivat myös murtolukujen hallitseminen. Jos kevättalvella harjoiteltu tapa käyttää murtolukuja ei ollut auennut hänelle, eikä hän kokenut tarjolla ollutta materiaalia auttavana, niin hän voisi esittää, miten murtolukuja voitaisiin opettaa vielä tehokkaammin. Tyttö ei osannut vastata.

Koska annoin luvan jättää tehtävien varsinaisen tekemisen pois, muutamat saivat materiaalista tarpeekseen hyvissä ajoin ennen tunnin päättymistä. Useat näistä oppilaista olivat kirjoittaneet paljon palautetta papereihinsa.

Neljännen tunnin pidin luokassa ilman luokan omaa opettajaa. Oppilaat aloittivat tehtävien työstämisen jälleen kerran sangen rivakasti. Joissakin oppilaissa näkyi jo kevään väsymys ja liian monia kiinnosti muut pulmat kuin matematiikan pulmat. Oppilaat olivat välitunnilla pelailleet spinnereillä ja niitä sain kerätä pois tunnin aikana luokanopettajan ohjeen mukaan. Yllytin oppilaita lukemaan tarkkaan tehtyjä tehtäviä ja arvioimaan niiden toimivuutta. Jälleen kerran etuosassa oleva poikaporukan pöytä kirjoitteli runsaasti palautetta. Oven vieressä istuvat odottivat lähinnä sitä, että tunti päättyy.

Tehtävistä tuli vähän kysyttävää. Yksi oppilas oli ollut poissa kaikki edelliset kerrat. Tämä oppilas keskittyi materiaalin huolelliseen täyttämiseen, ja sai avukseen edellisillä tunneilla tehdyt materiaalit, jotta saattoi tehdä viimeiset tehtävät.

Kannustin oppilaita vastaamaan tehtäviin 9 ja 10. Se nostatti vastustusta luokassa. Tehtävistä todettiin ääneen, että ne ovat vaikeita. Erityisesti harjoitus 9 koettiin hankalaksi. Tehtävänantoja pidettiin liian pitkänä ja oppilaat antoivat ymmärtää, ettei matematiikan tehtävät saaneet olla niin pitkiä. Suuri osa oppialaista palautti sangen vähäsanaisen monistenipun takaisin. Ne oppilaat, jotka olivat keskittyneet tehtävien toimivuuden arvioimiseen, olivat tehneet tahoillaan hyvää työtä. Heidän vastauksistaan sain myös asiallista palautetta.

Viimeinen palautetunti oli neljännen oppitunnin jälkeen, kun oppilaat olivat ensin käyneet välitunnilla. Ohjeeksi annoin yksilötyöskentelyn. Kannustin kirjoittamaan palautetta niin paljon kuin vain tuntui hyvältä. Tämänkin harjoituksen kohdalla moni toimi vain nopeasti ja jäi sitten odottamaan, että toiset saisivat valmiiksi. Nopeiden palautteissa oli lyhyitä lauseita, jos niitäkään. Ne oppilaat, jotka tekivät pisimpään tehtäviä, kirjoittivat myös sanallista palautetta määrällisesti enemmän.

5.1.2 Toisen testiryhmän kuvailu

Muokattu opetusmateriaali testattiin toisen kerran syyskuussa 2017. Syksyn testiryhmän materiaaleista on paljon enemmän vastausesimerkkejä kuin kevään ryhmältä, koska keväällä oppilailla ei ollut kovin aikaa tehdä tehtäviä. Tunneilla havainnoiminen oli myös vähäisempää, koska tutkija toimi luokassa opettajan ohella opettamassa ja ohjaamassa oppimateriaalin käytössä. Syksyn testiryhmä keskittyi tekemään tehtäviä ja opiskelemaan murtolukuja aivan kuin ne olisivat luonnollinen osa heidän tavallista matematiikan opiskelua.

5.1.3 Oppimateriaalin tehtävien esittely ja palautteet

Oppimateriaalista tehtiin ensimmäinen versio ensimmäistä testiryhmää varten. Oppilaiden esittämien vihjeiden ja toiveiden perusteella tehtiin korjauksia. Toinen versio oppimateriaalista valmistui toista testiryhmää varten. Vielä oppilaat huomasivat puutteita ja tutkija huomasi itse, että tehtäviin oli jäänyt virheellisyyksiä. Ohessa liki kaikki harjoitukset esitellään järjestyksessä.

I. Ensimmäisen tunnin harjoitukset ja palautteet

Kevään testiryhmän ensimmäisen oppitunnin jälkeen oppilaiden antamat palautteet tunnin materiaalista osoitti, että sanallinen palautteenantaminen on vielä haastavaa. Oppilaat olivat keskimäärin neutraalilla mielialalla tehtävien suhteen. 16 oppilasta ilmoitti tehtävien tuntuvan neutraaleilta tai mukavilta. Vain kolme oppilasta ei pitänyt tehtävistä lainkaan. Tehtävien mielekkyyden kohdalla painopiste oli lähempänä neutraalia. Vastaajia ensimmäisen oppitunnin tehtäviin oli 24 oppilasta.

Parhaiten onnistuneita asioita:

> *”Murtolukutehtävät, koska osasin ne” (OP1),*
> *”murtolukujen laskeminen” (OP2),*
> *”se kuvio-osuus, koska se oli tosi hauska” (OP3),*
> *”väritystehtävät” (OP4),*
> *”kun piti värittää osia” (OP5),*
> *”ehkä se väritystehtävä” (OP6),*
> *”Onnistuin parhaiten selittämään luvun kolme neljäsosaa” (OP7 ja OP8)*

Epäonnistuneimmaksi tehtäväksi esitettiin useaa eri tehtävää. Yksittäiset maininnat tulivat tehtävien 12 (2 kpl) ja 10 kohdalle. Yleisesti annetut sanalliset palautteet olivat seuraavanlaiset:

> *"en tiedä, osa tehtävien anto oli sekava" (OP9)*
> *"Varmaan kaikki, koska oon huono matikassa enkä taida jaksa oikeen kiinnostaa" (OP10)*
> *"jotkut ontui" (OP11)*
> *"jotkut mysteeritehtävät" (OP1)*
> *"Melkein kaikki, koska en ymmärtänyt" (OP8)*
> *"melkein kaikki, koska en muistanut mikä on murtoluku ja miten sitä ratkaistaan" (OP12)*
> *"kaikki, koska en osaa" (OP4)*
> *"Laventamistehtävä, en muista miten lavennetaan." (OP13)*
> *"Sellaiset, missä selitettiin todella paljon" (OP14)*

Toisen ryhmän mielestä pidetyimmät harjoitukset olivat 4 ja 5. Tehtäviä pidettiin mukavina, koska esimerkiksi harjoituksessa 4 sai piirtää ja värittää. Harjoituksesta 5 oppilaat pitivät, koska se oli *"helppo"* ja *"tarpeeksi vähän haastetta"*. Mukaviksi harjoituksiksi mainittiin 2, 9, 10. Harpin käytöstä pidettiin ja myös taittelun mukavuus mainittiin.
Negatiivista mieltä nostattivat erityisesti harjoitukset 1 (koska ei ymmärtänyt tai keksinyt), 2 ja 10. Harjoitus 10 todettiin monen oppilaan palautteessa vaikeaksi tai sellaiseksi, ettei sitä ymmärretty.

Ensimmäinen testiryhmä aloitti orientoivalla tehtävällä, jossa taiteltiin tasasivuista neliötä, tuntui tuntityöskentelyvaiheessa mielekkäältä. Tehtävän vastauksessa oli monenlaista palautetta: *"ai!! Mistä?", "Puoliksi" "kahdella tavalla", "kolmio", "neliö", "kahtia", "neliöinä ja kolmioina", "kulmasta kulmaan", " kaksi kertaa keskeltä", "Perusteluna: kokeilin kaikki tavat"* Palautteissa näkyy se, että oppilaat osaavat monta geometrian sanaa. Myös "puolikas" sanan käyttö oli tuttua usealle. Huolestuttavaa oli se, että vastaukset olivat juuri yhden tai kahden sanan mittaisia. Ainostaan vastaaja, joka kirjoitti *"Perusteluna: kokeilin kaikki tavat"*, käytti predikaattiverbiä vastauksessaan, vaikka vastaus sinänsä ei tuonut juuri valaistumista tehtävän tarkastajalle.

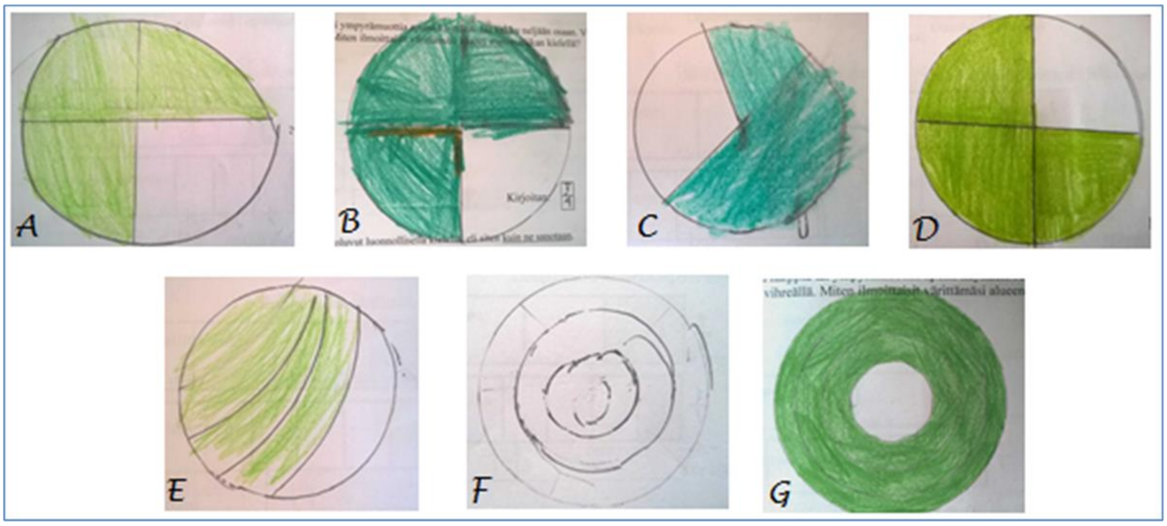
Toinen testiryhmä sai parannellun version orientoivasta tehtävästä. Tehtävä oli nimetty **harjoitukseksi 1**. Neliön jakamisesta saatiin seuraavia vastauksia: "*neljään yhtä suureen osaan", "kahtia", "Taitoin laidat yhteen niin, että siitä tulee suora kulma ja toin suorakulman pienempään neliöön" (OP10), "sivut yhteen kahdelta puolt tai kulmat yhteen kahdesta kulmast vastakkain"(OP5)* .Neljä oppilasta kirjoitti, ettei osaa selittää taittelua.

Ensimmäisen testiryhmän toinen orientoiva tehtävä yllätti vaikeudellaan ensimmäisen testiryhmän. Oppilaiden piti sijoittaa osaamiaan murtolukuja lukusuoralle, joka oli valmiiksi annettu materiaaliin. Luvut oppilaiden vastauksissa olivat pääosin väärin merkittyjä. Oppilailta oli jäänyt huomaamatta, että lukusuoralla oli tilaa vain nollan ja yhden välissä. Annettuja lukuja oli jopa miinus-merkkisinä.

Harjoitus 2 merkinnän saanut tehtävä koettiin toisessakin testiryhmässä haastavaksi. Murtolukumerkinnät olivat hukassa ja esimerkiksi yksi kymmenesosa merkittiin 1/10 kenoviivalla eikä murtoviivalla (OP11). Yksi kolmasosaa tarjottiin kaksi kolmasosaa kohdalla ja yksi neljäsosa oli puolikkaan ja kokonaisen välissä (OP16). Lukusuoralle oli laitettu valmiin murtoluvun lisäksi desimaalilukuja, jotka nekään eivät olleet kohdallaan (OP18 ja OP17). Viisi oppilasta ei ymmärtänyt lainkaan lukusuoran merkitystä. Neljä oppilasta oli osannut lisätä murtolukuja oikeille kohdilleen. Seitsemän oppilasta ei ”*osannut*” tai ”*älynnyt*”.

Teoriaosan jälkeen oppilaita pyydettiin kirjoittamaan ”puolikas” eri murtoluvuilla (**Harjoitus 3**). Annetut kohdat, joissa nimittäjä oli annettu valmiiksi, onnistui oppilailta aina siihen asti, kun nimittäjä oli 100. Kun nimittäjä oli 140, oppilaiden tarjoukset osoittajaksi olivat jo 7, 9, 70 (12 kertaa), 76, 80 (2 kertaa) ja 120. Kun vastauksia oli yhteensä 22, vain reilu puolet vastasi oikein. Tehtävän jatko-osassa, jossa piti keksiä itse nimittäjä, vain 12 oppilasta täytti kohdat. 10 oppilasta onnistui ilmaisemaan ”puolikkaan” myös itse keksimillään murtoluvuilla. Toinen testiryhmä suoriutui tehtävästä varsin hyvin. Puolikkaan merkitseminen eri luvuilla onnistui pääsääntöisesti 16 oppilaalla. Näistä 11 oppilasta oli osannut keksiä myös puuttuvia nimittäjiä ja osoittajia. Kaksi oppilasta kirjoitti, ettei ymmärtänyt tehtävää.

Harjoituksen 4 harppitehtävä osoitti, että harpin käyttö oli hankalaa viidesluokkalaiselle. Ensimmäisestä testiryhmästä 22 vastaajasta 11 käytti harppia vastaamiseen ja vain 7 harppijälki oli sellainen, että siitä näki oppilaan hallitsevan harpin käytön. Oppilaiden tuntipalautteessa sekä opetusmateriaalissa olleissa palautteissa tuotiin esille se, että harppia käytetään vähän ja sen yllättävä käyttö on hankalaa. Kahdella oppilaalla harpinkäyttö ontui, muutoin oppilaat olivat piirtäneet siistejä ympyröitä. Ympyrän jakamisessa oli vaihtelua. Kaikki oppilaat vastasivat murtolukukohtaan $\frac{3}{4}$, vaikka silmämääräisestikin saattoi nähdä, että se ei ihan pitänyt paikkaansa eräiden ympyröiden kohdalla. Tehtävää muokattiin lopulliseen muotoon vasta toisen testiryhmän jälkeen. Siellä ympyrän jakaminen oli ymmärretty monimuotoisemmin ja kuvio 9 osoittaa, miten oppilaat olivat mielivaltaisesti jakaneet ympyrää neljään osaan. Tehtävää parannettiin lisäämällä tehtävänantoon sana, jolloin ympyrä tuli jakaa ”neljään YHTÄ suureen osaan.



KUVIO 8. Oppilaat jakoivat ympyrän neljään osaan ja värittivät kolme osaa.

Harjoituksessa 5 murtolukujen kirjoittaminen luonnollisella kielellä oli haastavaa. Pienien lukujen kohdalla oli vähemmän virheitä, mutta harvemmin esille tulevia lukuja oli selvästi vaikea kirjoittaa.

TAULUKKO 6. Ensimmäisen testiryhmän kielentävää esittämistä murtoluvuista harjoituksessa 5/I.

$\frac{3}{5}$	*”kolmas viidesosaa” (OP1)*
$\frac{7}{11}$	*”seitsemäs yhdeksättätoista osaa” (OP1)*
$\frac{19}{23}$	*”yhdeksän kahdeskymmeneskolmasosaa” (OP2)*
	”Yhdeksäntoista kaksikymmentäkolmasosaa” (OP15)
	”Yhdeksäntoista kaksikymmentäkolme osaa” (OP12) ja (OP9)
	”Yhdeksäntoista kaksikymmenesosaa” (OP4)
	”Yhdeksäsosa kahdestakymmenestäkolmesta” (OP16)
	”Yhdeksän kaksikymmentäkolme osaa” (OP3)

Tämän varsin yksinkertaisen tehtävän vastauksissa voidaan havaita, että ensimmäisen testiryhmän oppilailla on paljon vaikeuksia järjestyslukujen hallinnassa. Etenkin viimeisen tehtävän kohdalla erilaisten vaihtoehtojen määrä on yllättävän suuri. Onneksi muutama aivan oikeakin vastaus oli.
Kolmetoista vastaajaa 23 oppilaasta oli vastannut tähän kohtaan oikein. Kaksi ensimmäistä murtolukua oli kirjoitettu pääosin aivan oikein. Kolmas murtoluku ilmaistiin monimuotoisemmin:

TAULUKKO 7. Toisen testiryhmän kielentävää esittämistä murtoluvusta harjoituksessa 5/I.

$\frac{19}{23}$	*”yhdeksäntoista 23 osaa” (OP3)*
	”yhdeksäntoista kaksikymmentäkolmeosaa” (OP21 ja OP7)
	”23 jaettuna 19:sta” (OP12)
	”yhdeksän kaksikymmentäkolme osaa” (OP15)
	”yhdeksäntoista kahdettakymmenettä osaa” (OP23)

Ei ole lainkaan kummallista se, että oppilaat vieroksuvat sanallisia tehtäviä ja sanallisten vastausten antamista. Kirjoittamisen vaikeus ja oikeinkirjoitus vaativat enemmän kuin muutaman luvun ja symbolin merkitseminen harjoituksen vastauskohtaan.

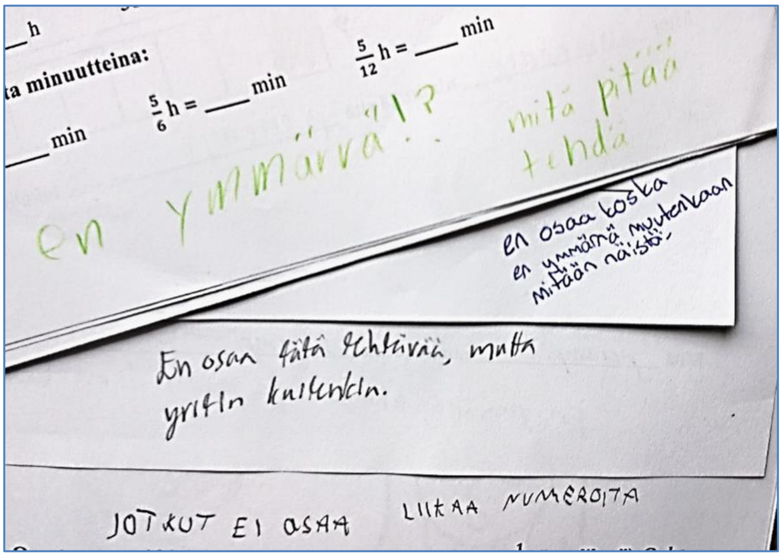
Harjoitukset 6 ja 7 sisälsivät värittämistä ja alueiden nimeämistä. Harjoituksessa oli tarkoitus havainnollistaa murtoluvun kokoa alueena kokonaisesta. Ensimmäisen testiryhmän oppilaat antoivat positiivisia palautteita harjoituksista. Havainnollisista murtolukujen väritystehtävistä pidettiin sekä tuntityöskentelyn perusteella, että tuntipalautteen perusteella. Vain yksi oppilas ei hallinnut murtolukuosan värittämistä ohjeen mukaan. Toinen testiryhmän parissa harjoitukset toimivat myös hyvin. Vain vähän horjuntaa oli vastauksissa. Usea jätti harjoituksen 7 tyhjäksi.

Harjoituksen 8 taittelutehtävässä piti taitella leikatut ympyrät mahdollisimman moneen osaan. Työ tuotti tuntityöskentelyssä monenmoisia lukuja. Oppilaat eivät kuitenkaan pystyneet kirjoittaen kertomaan, miten jakoivat ympyrää. Ensimmäinen testiryhmä käsitteli harjoitusta 8 ikään kuin ensimmäisenä harjoituksena. Edeltävät tehtävät olivat orientoivia tehtäviä. Palautteiden perusteella kaikki tehtävät nimettiin harjoituksiksi korjatussa opetusmateriaalissa.

Harjoituksessa 9 piti keksiä esimerkki siitä, miten murtoluvut näkyvät arkipäivän elämässä. Vaikka tehtävänanto oli ilmaistu kokonaisella lauseella ja edeltävät osiot opetuspaketissa oli kirjoitettu sanoin, oppilaiden vastaukset olivat varsin lyhytsanaisia tokaisuja. ”*kun askartelee ja leipoo”, ”kaupassa?”* Kaikkien vastanneiden joukossa oli vain kaksi kokonaista lausetta: *”Esim, jos lehmiä on 4 ja kolme niistä kuolee, niin jää yksi.” ja ”Kaverusten pitää leikata pitsa kolmeen osaan, kaikki saavat yhden palan.”*
Toinen testiryhmä esitti laajempia vastauksia ja vastauksissa käytettiin kokonaisia lauseita. Arkipäivän esimerkit murtolukujen kohdalla olivat oppilaille läheisistä aiheista. Pitsaa jaettiin monessa vastauksessa ja kakkua jaettiin osiin, mutta eräs oppilas oli oivaltanut myös jotain aivan uutta: ”*Murtoluvut näkyvät esimerkiksi mosaiikeissa, piirakoissa, kakuissa ja pitsoissa.*”

(OP2) ”*Nukkuminen on osa murtolukua. Ihminen nukkuu puolet vuorokaudesta.”*(OP8) Haastavaa ajanseurantaa tarjosi toinen: ”*Jos puhutaan ajasta esim. ruokailussa aika syödä* $\frac{2}{6}$. (OP20) Silmämääräisesti opittuakin tuli esiin. ”*Esimerkiksi kuinka monta osaa lautasella on salaattia ja kuinka monta osaa muuta ruokaa*.” (OP1) ”*Esim. jos on harjoitus niin se voi viedä päivästä* $\frac{1}{6}$ *osaa.*” (OP17)

Harjoituksen 10 suoritukset jäivät erittäin vähäisiksi ensimmäisessä testiryhmässä. Vain kaksi oppilasta 24:stä pystyi tekemään tehtävän. Muutamilla oppilailla oli vähän yritystä, mutta ne eivät osoittaneet, että oppilas olisi hallinnut murtoluvun käytön kellonajoissa.



KUVIO 9. Oppilaiden kommentteja monisteiden nurkissa.

Paperinreunakommentit: ”*en ymmärrä!? Mitä pitää tehdä*” (OP9), ja ”*en osaa tätä tehtävää, mutta yritin kuitenkin*” (OP7) kertovat harjoitus 10 haasteellisuudesta. Kommentit ”*en osaa koska en ymmärrä muutenkaan mitään näistä*” (OP17) ja ”*Jotkut ei osaa. Liikaa numeroita*” (OP1) liittyvät harjoitukseen 13.

Kellonajat ja murtoluvut olivat vaikeita myös toisessa testiryhmässä. Yhdeksän oppilasta oli saanut 2–5 oikeaa lukua kohdalleen. Näistä kahden voi tulkita tietävän, mistä on kyse. Kahdeksan oppilasta oli aivan väärässä merkinnöissään. Kolme oppilasta ei edes yrittänyt.

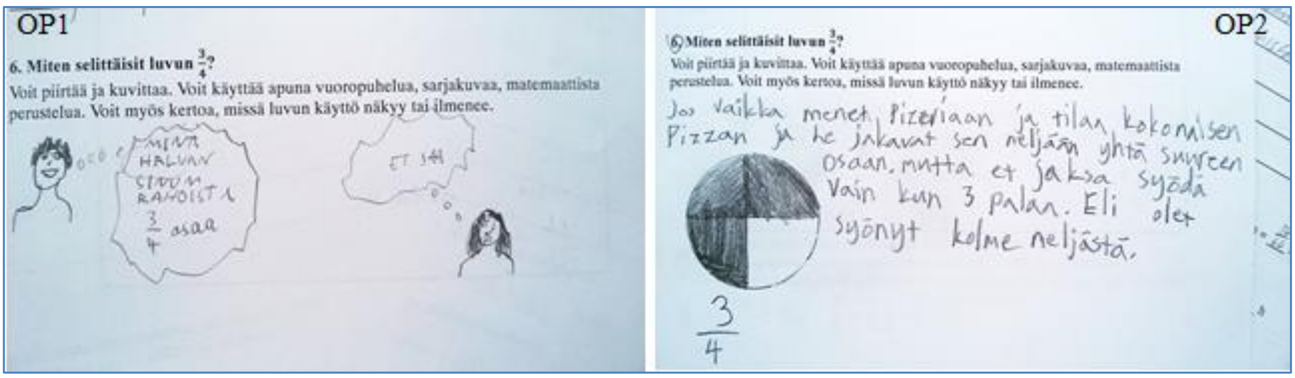
Harjoitus 11, jossa piti merkitä =, > tai <, tuntui oppilaiden mielestä vaikealta. Perustelut vaihtelivat sen mukaan, millainen näkökulma oppilaalla oli tehtävään ja sen ratkaisemiseen: *”En ole ymmärtänyt ikinä. ”(OP6), ”liian vaikea minulle, ei välttämättä muille.” (OP17), ”alempi ja ylempi luku on* *suurempi" (OP18), "puuttuu saman verran" (OP9), "Siinä on isommat luvut" (OP1)* ja *"Ne ovat melkein kokonaisia" (OP12).* Oppilaan heikkoa itsetuntoa voisi lukea kommentista: *"En osaa, koska olen ilmeisesti huono matematiikassa. Syvimmät pahoitteluni."* (OP7)

Yli puolet (12) oppilaista toisessa testiryhmässä ei vastannut tähän tehtävään. Vastauksia tarjottiin eri perusteluilla, jotka olivat sekä oikein että väärin. B-kohdan vastaukset ja perustelut jakautuivat myös kovasti. Esimerkkinä TAULUKKO 8 osoittaa, millaisia vastauksia oppilaat antoivat tehtävävään: *"$\frac{3}{4}$ on (>, =, <) kuin $\frac{2}{3}$, koska"*

TAULUKKO 8. Harjoituksen 11 kielentämistä murtoluvuista. Toinen testiryhmä.

$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$	*"Isompia lukuja"*
	"koska isompi luku"
	"se on suurempi"
	" 3 on suurempi kuin "
$\frac{3}{4} < \frac{2}{3}$	*"toisessa on pienempi nimittäjä"*
	"koska 1 kolmasosa on suurempi kuin 1 neljäsosa"
$\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$	*"niistä tulee saman verran"*
	"molemmista puuttuu yksi"

Harjoituksen 12 kolmen neljäsosan selittäminen jäi suurelta osalta oppilaita hyvin epämääräiseksi. Ensimmäisessä testiryhmässä kaksi oppilasta käytti hyväkseen tilaa ja piirsi. Suurin osa vastaajista päätyi piirtämään ympyrän, johon oli väritetty kolme osaa neljästä. Selittäminen puuttui.



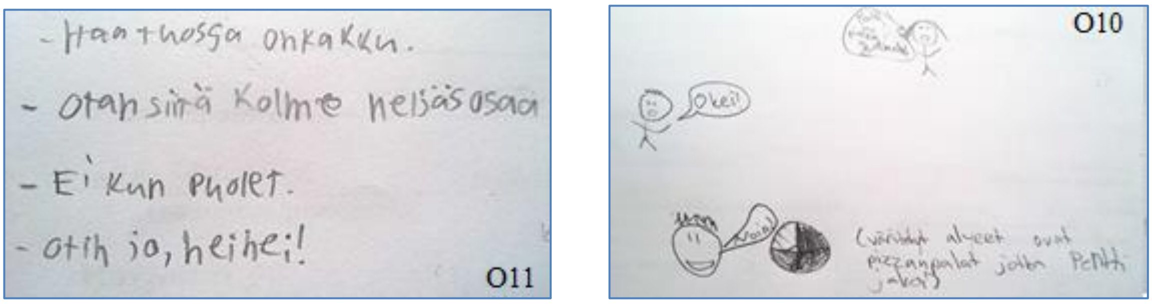
KUVIO 10. Ensimmäisen testiryhmän oppilaat OP1 ja OP2 selittävät $\frac{3}{4}$.

OP15: ”*Se näkyy kellossa. Esim.* $\frac{3}{4}$ *osaa on 45 min.*”

OP13: *”Jos sinulla on esim. kakku, joka on jaettu 4 osaan,* $\frac{3}{4}$ *tarkoittaa 3 palasta kakusta.”*

OP5: *”Pöydällä on neljä omenaa. Liisa ottaa niistä yhden. Pöydälle jää kolme omenaa, eli* $\frac{3}{4}$ *omenista.”*

Toiselta testiryhmältä tuli myös hyvin vähän vastauksia tehtävään, jossa piti selittää luku $\frac{3}{4}$. Muutamia neljään osaan jaettuja ympyröitä oppilaat olivat tehneet, mutta vastauksena ei ollut juuri kirjallista tuotosta. Kaksi oppilasta ehti ideoida:



KUVIO 11. OP11 ja OP10 osoittivat, miten ymmärsivät luvun kolme neljäsosaa.

Harjoitusta muokattiin niin, että lopullisessa versiossa tehtävänanto on seuraava:
”Keksi esimerkkejä, joissa käytät lukua $\frac{3}{4}$.” Oppilaiden on helpompi kertoa esimerkkejä kuin selittää jokin asia.

Harjoituksessa 13 pyydettiin pohtimaan lukua kolme, kun se jaetaan kahteen yhtä suureen osaan. Pohdintaa ei monikaan oppilas edes yrittänyt. Yksi vastaus: ”*yksi ja puoli kolmasosaa*” ja muutama kirjoitettu murtoluku tuli vastauksiksi. ”*Se oli outoa, koska siinä oli puolikas*” (OP15), pohti eräs oppilas. Koska toisen testiryhmän palautteissa ja vastauksissa ei ollut mitään uutta, tehtävä päätettiin pitää sellaisenaan lopullisessa oppimateriaalissa.

II. Toisen tunnin tehtävät ja palautteet

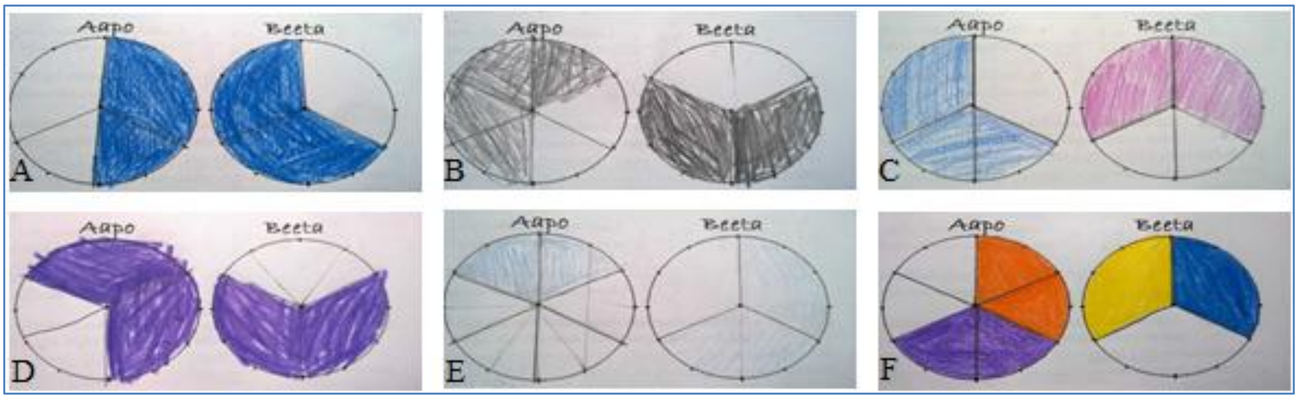
Toisen oppitunnin jälkeen kirjallinen palaute (Liite 4) oli ensimmäisessä testiryhmässä positiivisempi kuin ensimmäisen tunnin jälkeen. Tehtävät olivat 18 oppilaan mielestä neutraaleja tai mukavia. 7 oppilasta oli negatiivisesti suhtautuvia. Tehtävien mielekkyys oli jo vahvasti positiivisella puolella. 10 oppilasta antoi positiivisen palautteen. 6 oppilasta ei pitänyt tehtäviä mielekkäinä.

Onnistuneita tehtäviä kuvailtiin seuraavasti: *”T4, koska siinä jouduttiin käyttämään* *supistamista ja laventamista" (OP14), "Parhaiten onnistui Minna ja Maisa tehtävä" (OP7), "lauseketehtävät" (OP19) ja "ensimmäinen, osasin sen jotenkin" (OP17).* Ensimmäisellä harjoituksella oppilas tarkoittaa orientoivaa tehtävää. Oppilaat peilaavat onnistunutta tehtävää siihen, miten hyvin he itse osasivat tehdä tehtävän. Ontuvia tehtäviä lueteltiin ilman perusteluja useita. Niitä olivat harjoitukset 1, 2, 3 (2 kertaa) ja 4 (2 kertaa). Sanallisesti ilmaistiin "*3, koska oli epäselvä tehtävänanto*" (OP9), "*kaikki, koska ne oli vaikeita ja tylsiä*" (OP2), "*puolet*" (OP16) ja "*pari viimeistä, koska ne olivat vähän vaikeita.*" (OP18). Viimeinen kommentti siitä, että tehtävä oli huono sen vaikeuden takia, voi olla viesti siitä, että oppilas kokee vain helpot tehtävät hyviksi tehtäviksi. Haasteisiin ei uskalleta, jakseta tai viitsitä lähteä. Toisen tunnin tehtäviä teki 24 oppilasta. Sanallisissa palautteissa ja vastauksissa on enemmän lausemuotoa kuin ensimmäisen tunnin jälkeen.

Toisen testiryhmän mielestä harjoitukset 1 ja 3 kuvailtiin helpoiksi ja sellaisiksi, että ne osattiin. Yksittäisiä vastauksia mukavista tehtävistä tuli myös harjoitusten 4, 5 ja 6 kohdilla. Harjoitusta 5 pidettiin vaikeana, mutta siitä kuitenkin pidettiin kahden vastaajan palautteissa. Tunnin huonoimmaksi tehtäväksi nimettiin monta eri tehtävää. Useimmin mainittiin harjoitus 5, jota ei oltu tajuttu ja joka todettiin vaikeaksi. Joidenkin mielestä hankalia olivat myös yksittäisesti harjoitukset 1, 2, 4 ja 6.

Harjoituksessa 1 tuli jakaa ympyrä ensin kolmeen osaa ja sen jälkeen osat vielä kahteen. Alun perin tehtävä oli orientoiva tehtävä. Siinä kysyttiin, mitä osoittajalle ja nimittäjälle on tapahtunut? Osoittajan ja nimittäjän muutosta kuvaillaan seuraavasti: *"ne kaksinkertaistuu" (OP17), "ne on tuplaantunu" (OP20), "ne on lavennettu" (OP14 ja 8 muuta) ja "Monistunut" tai "kahdenkertaista" (OP9 ja 10 muuta).* Neljä vastaajaa ei vastannut mitään. Vaikka tehtävään ei oltu annettu vaihtoehtoisia sanoja vastauksiksi, niin oppilailla oli kuitenkin rohkeutta käyttää erilaisia sanoja. Tässä harjoituksessa oppilaat eivät ole käyttäneet lausemuotoista vastausta, vaikka tilaa monisteessa olisi ollut kolmen rivin verran.

Toisen testiryhmän kohdalla ohjeistusta parannettiin ja vastauksista saattoi tulkita paremmin, miten oppilaat hallitsevat käsiteltävää teemaa.
Harjoituksessa kaksi ympyrää piti jakaa ohjatusti osiin.



KUVIO 12. Toisen testiryhmän piirtämiä ympyräpareja harjoituksessa 1.

Aapo ja Beeta nimettiin pareina seuraavasti:

Oikeat vastaukset: $\frac{4}{6}$ / $\frac{2}{3}$ ja $\frac{8}{12}$ / $\frac{4}{6}$

Tarjottuja vastastauksia: $\frac{2}{3}$ / $\frac{2}{6}$ (10 oppilasta), $\frac{2}{3}$ / $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$ / $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{3}$ / $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{6}$ / $\frac{4}{4}$

Supistamista käsittelevän teoriaosuuden jälkeen harjoiteltiin supistamaan. **Harjoituksessa 2** lasku piti kirjoittaa sanoin, ensimmäisen testiryhmän oppilaiden antamat vastaukset osoittavat, etteivät he olleet lukeneet edellisen sivun teoriaosuutta, jossa oli malli siitä, miten kirjoitetaan lasku sanoin.

Monenlaista sanallistamista vastausta tarjottiin: $\boxed{\frac{15^{5}}{25} = \frac{}{}}$

"15 jaetaan viidellä ja 25 jaetaan viidellä" (OP6),

"kuinka monta kertaa viisi mennee molempiin" (OP21),

"viidestoista osa 25" (OP22),

"viisitoista kaksikymmentäviisi supistettuna kolmella" (OP20).

Yksi vastaaja pääsi kuitenkin jo varsin lähelle totuutta:

"viisitoista kahdeskymmenesviidesosaa supistettuna viidellä on kolme neljäsosaa" (OP5).

Tämän vastauksen kirjoittaja oli lukenut teoriaosuuden ja osasi siten mallin mukaan kirjoittaa vastauksen. Vastaaja valitettavasti antoi vielä väärän loppuvastauksen, joka olisi pitänyt olla *"kolme viidesosaa"*.

Toinen testiryhmä ei osoittanut, että tehtävä olisi ollut liian helppo heillekään. Vain neljä oppilasta pystyi kirjoittamaan laskun oikein myös sanoin. Toisen testiryhmän vastauksia:

"Viisitoista kaksikymmentäviisi pupistetaan viidellä kolme viidesosaa" (OP7)

"Supista 5 15toista ja 5 25tä" (OP21)

"Viisitoista kahdettakymmenettä supistettuna viisi on kolme neljännestä." (OP23)

”Viisitoista kahdestakymmentä viisiosaa supistettuna viidellä on kolme viisiosaa.” (OP6)

”15 jaetaan viidellä josta tulee 3 sen jälkeen ja sen jälkeen 25 jaetaan 5 josta tulee 5.” (OP20)

”Viisitoista kahtakymmenttsiittä osaa supistetaan viidellä se on kolme viises osaa.” (OP17)

Harjoituksessa 3 ensimmäisen testiryhmän oppilaat käyttivät vain vähän tilaa, kun piti tehdä mekaanista supistamista. Monet oppilaat eivät tehneet edes yhtä mallivastausta.

Toisen testiryhmän oppilaiden keskuudessa kertotaulun osaamisen horjuvuus ilmeni esimerkiksi supistamisharjoituksessa 3b. $\frac{18}{24}$

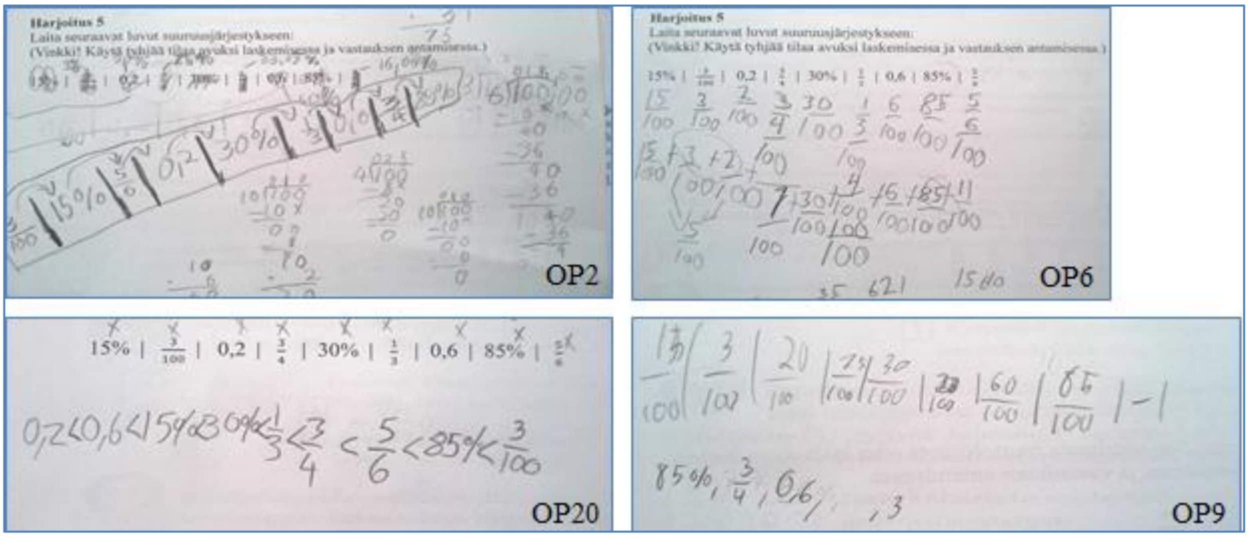
- Kun lukua supistettiin kuudella (6) saatiin $\frac{2}{4}$ tai $\frac{3}{5}$.
- Kun lukua supistettiin kolmella (3) saatiin $\frac{4}{8}$.
- Kun lukua supistettiin yhdeksällä (9) saatiin $\frac{2}{12}$.
- Kuusi oppilasta supisti 3:lla ja sai $\frac{6}{8}$ (kuusi kahdeksasosaa).

  10 oppilasta supisti suoraan kuudella (6) ja neljä oppilasta hyödynsi mallia ja supisti ensin 3:lla ja sitten vielä 2:lla, jolloin saivat vastaukseksi $\frac{3}{4}$, mikä oli oikea vastaus.

Harjoitus 4: *” Laita luvut suuruusjärjestykseen. Tee jokaisesta murtoluvusta oma lasku. Käytä tyhjää tilaa avuksi laskemisessa ja vastauksen antamisessa.”* Harjoituksessa vain 8 oppilasta ensimmäisessä testiryhmässä osoitti laskutehtävän tekemistä, eli olit käyttänyt aikaa ratkaisun saamiseksi. Vaikka tehtävänannossa kehotettiin käyttämään tyhjää tilaa hyväksi, sitä ei käytetty. Harjoitus 4 nostatti tunteita palautteiden perusteella. Ohje oli laittaa annetut luvut suuruusjärjestykseen. Uudenlainen tehtävä aiheutti oppilaissa selvää hämminkiä. Spontaanit huudahdukset, ”*Täh!? Vaikea*” ”*en osaa*” ”*ei toimi!*” ”*ei mitään tietoo*” ”*en älyä*”, kertovat, että moni luovutti ennen kuin oli kunnolla perehtynyt tehtävään ja yrittänyt.

Toisen testiryhmän kohdalla oli myös hankaluutta, vaikka kymmenellä oppilaalla olikin hyviä laventamisharjoituksia. Kaksi oppilasta järjesteli lukuja sellaisinaan. Liki puolet oppilasta ei yrittänyt lainkaan.

Ensimmäisestä testiryhmästä palaute **harjoituksen 5** toimivuuteen oli vähäistä. Toisen testiryhmän oppilaista useampi yritti tehdä tehtävää. Vain muutama oivalsi koko tehtävän monimuotoisuuden.



KUVIO 13. Oppilaiden työn jälkiä harjoituksesta, jossa piti laittaa erimuotoisia lukuja suuruusjärjestykseen.

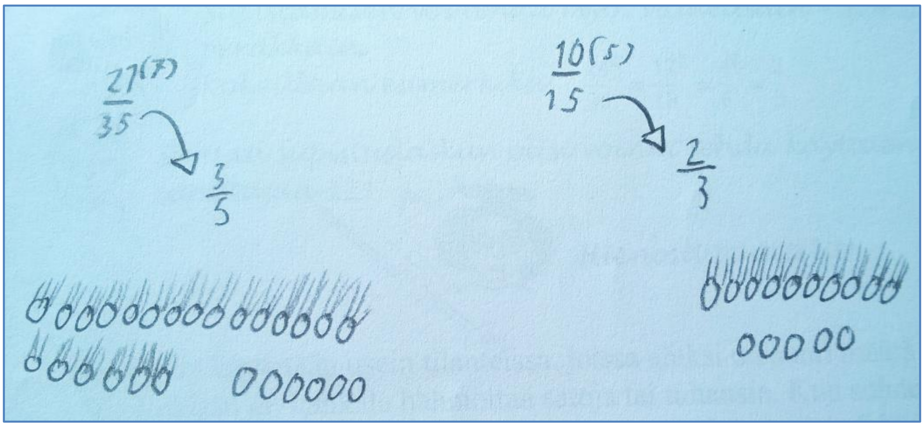
Vastauksissa on huomattavaa (Kuvio 13) se, että usea vastannut oppilas pyrki järjestämään luvut laskematta lainkaan. Päättelemällä saattoi päästä pitkälle, mutta kaikki yrittäneet eivät päässeet lainkaan oikeaan ratkaisuun tehtävässä.

Harjoituksen 6 ohjeessa luki, että piirtäminen on sallittua. Tehtävässä pohdittiin kahden eri luokan oppilaiden suhdelukuja. Monisteessa oli runsaasti tilaa vaikka kokeilla eri vaihtoehtoja ratkaisun saamiseksi. Ensimmäisessä testiryhmässä oppilaiden opetusmateriaalissa oli kyseisen tehtävän kohdalla vähän tuotosta. Muutamat annetut vastaukset olivat varsin niukkoja eikä laskutoimitusta tai ajatteluvaiheita näkynyt. Vastauksista

> *”Maisan koulussa, koska viisi oppilasta oli poikia ja Minnan neljätoista. ” (OP14),*
>
> *”Vähennetään 35 21 siitä tulee 14 / vähennetään 15 10 siitä tulee viisi. / Minnan luokalla enemmän tyttöjä kuin poikia. (OP17)* ja
>
> *”Minnan, koska 21-10=11” (OP8)*

heijastuu arvailu ja silmämääräinen katsastelu tehtävään. OP23 vastauksessa ei näy prosessia, mutta teksti on vain toteamus:

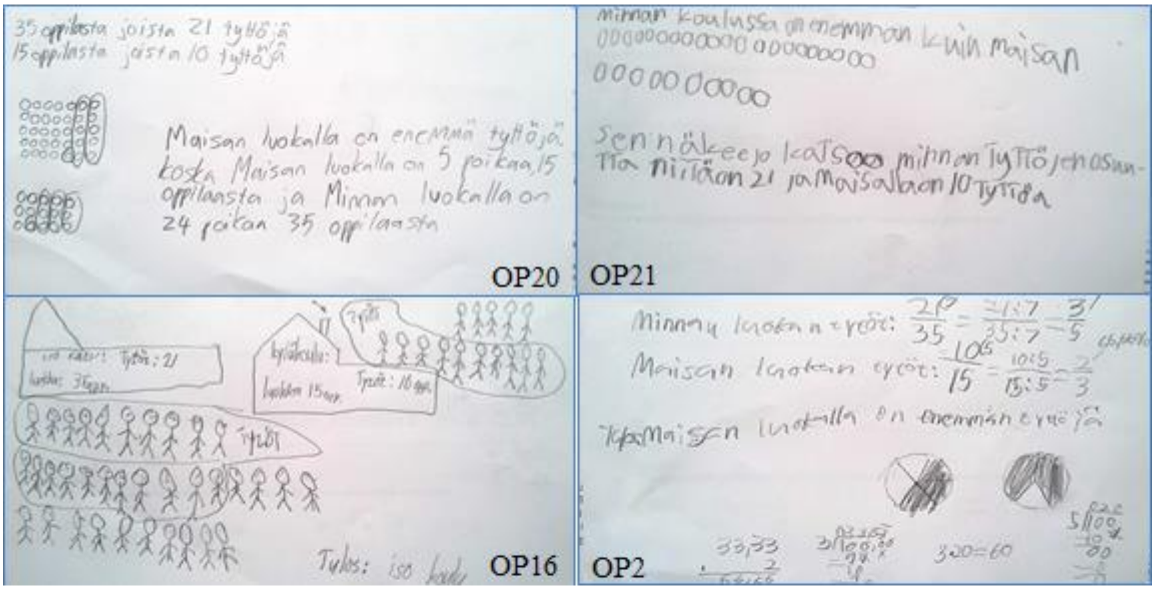
> ” *Maisalla, koska Minnan luokalla on* $\frac{3}{5}$ *ja Maisalla* $\frac{2}{3}$ *.”*



KUVIO 14. OP24 laskelma ja piirros Maija ja Maisa –tehtävään.

Vain muutama ensimmäisen testiryhmän oppilas piirsi kuvioita. Kuvio 14 on OP24 vastaus. Hän ei sanallisesti purkanut piirustustaan ja arvaukseksi jää, mikä lopullinen vastaus hänen mielestään on. OP 23 ja OP24 lailla tulokseen pääsi 14 oppilasta. Kukaan ei kuitenkaan ollut muuttanut lukuja samannimisiksi, jolloin kahden luvun vertaaminen olisi ollut mahdollista. Oppilaat vastasivat vain arvaamalla, kumpi luku olisi isompi.

Toisen testiryhmän oppilaista12 jätti tehtävän tyhjäksi. Monenlaisia ratkaisuja tarjottiin tehtävässä (Kuvio 15), jossa vertailtiin tyttöjen osuutta kahdessa erikokoisessa luokassa. Vastauksista näkyy se, että tuntityöskentelyn aikana oppilaita kannustettiin piirtämään useaan kertaan. OP16, OP20 ja OP21 vertailevat selkeästi vain määriä eikä suhteita, eikä näin olleen ole ymmärtänyt murtoluvun käsitettä kunnolla. OP2 on ymmärtänyt tehtävän. Hän on osannut ilmaista tyttöjen osuuden murtolukuna molemmissa tapauksissa. OP2 on pyrkinyt vertailemaan murtolukuja keskenään, mutta hän ei ole osannut tehdä sitä laventamalla vaan hän on muuttanut murtoluvut prosenteiksi ja verrannut niiden avulla.



KUVIO 15. Toisen testiryhmän vastauksia harjoitukseen 6. Lähestymistapoja oli erilaisia.

III. Kolmannen tunnin tehtävät ja palautteet

Kolmannelle tunnille osallistui ensimmäisessä testiryhmässä 22 oppilasta. Tehtävät tuntuivat vain kuuden mielestä kurjilta. Positiivisia ajatuksia esiintyi kahdeksalla. Tehtävien mielekkyys jakaantui molempiin ääripäihin tasaisesti. Neutraalilla linjalla oli vain 8 oppilasta.

Onnistumisista tuli seuraavaa palautetta: *”kaikki paitsi T4” (OP15), ”T4” (OP23), ”Ensimmäinen tehtävä, koska osasin” (OP17), ”eka tehtävä” (OP20), ”sanalliset tehtävät” (OP1) ja ”Parasta oli yhteisen nimittäjän löytyminen” (OP24)*. Parhaaksi tehtäväksi esitettiin lisäksi neljän palautteessa mekaaninen tehtävä, jossa piti etsiä kahden luvun yhteinen nimittäjä, eli harjoitus 1. Yksi oli sitä mieltä, että harjoitus 3 oli paras.

Ontuvia tehtäviä tarjottiin useita. Viimeisen sivun tehtäviä pidettiin hankalina: ”Yhteinen nimittäjä, en tajunnut” (OP13), ”Tehtävä, jossa harjoiteltiin laventamista, oli turhan vaikea.” (OP7) ja ”vika oli epäselvä” (OP7, OP18 ja OP17).

Toisen testiryhmän mielestä mukavimpana pidettiin myös harjoitusta 1, koska se oli vastaajien mielestä helppo ja myös värittämisestä pidettiin. Muita mukavia tehtäviä olivat 3, 4 ja 5. Vastaukset paljastivat, että tehtävät eivät olleet välttämättä helpoimpia, mutta niitä oli mukava tehdä ja niissä oppilaat olivat oivaltaneet jotain oleellista murtoluvuista. Vastauksista voisi päätellä, että oppilaat olivat hieman lämmenneet kielentäville harjoituksille.

Kolmannen tunnin harmittavimmaksi harjoitukseksi tarjottiin eri vaihtoehtoja. Syiksi tarjottiin ”liian vaikea” tai ”en ymmärtänyt”. Useimmiten tarjottiin harjoitusta 5. Muita mainittuja olivat 2, 7, 8 ja 9. Yksi sanoi huonoksi tehtäväksi harjoitusta 1, koska se oli ”liian helppo”.

Harjoitus 1: Oppimateriaali alkoi jälleen kahden ympyrän tarkastelulla. Ensimmäisessä testiryhmässä tehtävän perusteluja ei jokaiselta vastaajalta tullut. Suuremmaksi osaksi osattiin varsin hyvin määritellä 1/3. Perusteluja esitettiin seuraavasti: *”koska pienempi alaluku” (OP2), ”koska nimittäjä on siinä pienempi” (OP15), ”koska se on lähempänä kokonaista” (OP12), ”koska siinä on kolme osaa ja toisessa neljä ja ympyrät ovat samankokoisia” (OP14), ”1 on lähempänä 3 ja kauempana 4.” (Op18)* Vastauksissa on enemmän kuin yksi tai kaksi sanaa. Vastaajien lähestymistapa perusteluun vaihtelee suuresti. Osa keskittyy lukuihin ja osalla katse on enemmän visuaalisessa muodossa, jolloin kuvan merkitys on tärkeä.

Ensimmäisen harjoituksen perustelukohtaan tuli toiselta testiryhmältä vastauksia seuraavasti:

”koska siinä on pienempi nimittäjä” (OP11)

”Osia on vähemmän silloin ne ovat isompia” (OP2)

”Koska siinä on kolme osaa ja neljässä on pienemmät osat” (OP7)

”Koska siinä on isompi alue väritettynä” (OP12)

”koska molemmista on väritetty yksi osa ja si, missä on yksi kolmasosa on isompi nimittäjä.” (OP1)

”ympyrästä meni enemmän” (OP5)

”yksi neljäsosa on suurempi koska nimittäjä on suurempi” OP19)

”koska siinä on pienempi osoittaja” (OP15)

Sarjakuvana esitetyn teorian sisältö sai palautteen: *”Laventamisen selitys hyvä. Matikan numero 6 ja ymmärsin!” (OP10)*. Teoriaosuuden jälkeinen **harjoitus 2** olisi kaivannut oppilaiden mielestä tehtävänannon. Nyt tehtävässä oli vain annettu $\frac{{}^{4}8}{9} =$
ja laskun perässä oli vain viiva, jonka alussa luki: ”Luetaan”. Se, että tehtävänanto puuttui, ei vaikuttanut siihen, pidettiinkö tehtävästä. Tehtävää pidettiin *”hyödyllisenä”, ”hyvänä ja hauskana”* sekä *”toimivana”* Eräs kommentti oli: *”Tämän tehtävän ymmärtää, jos lukee tarkasti.” (OP4)* Ensimmäisen testikerran jälkeen harjoitusta muokattiin selkeämpään muotoon ja oppilaille annettiin myös mallia siitä mitä harjoituksessa haettiin. Toinen testiryhmä saikin selkeämmän tehtävänannon ja vastauksista saattoi huomata, että tehtävä toimii hyvin. Yksi oppilas erehtyi supistamaan. Vaihtelua esiintyi järjestyslukujen kirjoittamisessa, mutta suurin osa osoitti, että tiesi, mistä on kyse.

Harjoitukset 3–5 olivat mekaanisia tehtäviä ja esimerkiksi harjoituksesta 4 annettiin palautetta seuraavasti: *”En ymmärrä yhteistä nimittäjää” (OP13) ”Ihan kivana tehtävä” (useampi vastaus).* Oppilaat tunsivat olevansa turvallisella vyöhykkeellä mekaanisen tehtävän kanssa. Toisessa testiryhmässä peruslaskut onnistuivat. Kolme oppilasta sai kaikki mekaaniset peruslaskut laskettua. Eriyttäminen erityisesti ylöspäin näytti onnistuneen.

Harjoituksen 6 kohdalla ensimmäisessä testiryhmässä vastustus oli selvästi esillä. *”Nää ei oo hirveen matemaattisia tehtäviä” (OP1), ”Tässä ei oo mitään järkee” (Op8),* osoittavat, että oppilaat eivät koe sanallisia tehtäviä edes matematiikan opiskeluun sopiviksi. Nämä oppilaat eivät näe kielentämisen tärkeyttä matematiikan oppimisessa. Yksi oppilas vastasi: *”Tämä tehtävä on hyvä ja kehittävä” (OP7).* Harjoituksessa piti keksiä ja kirjoittaa ohje, miten löytää helposti yhteisen nimittäjän.

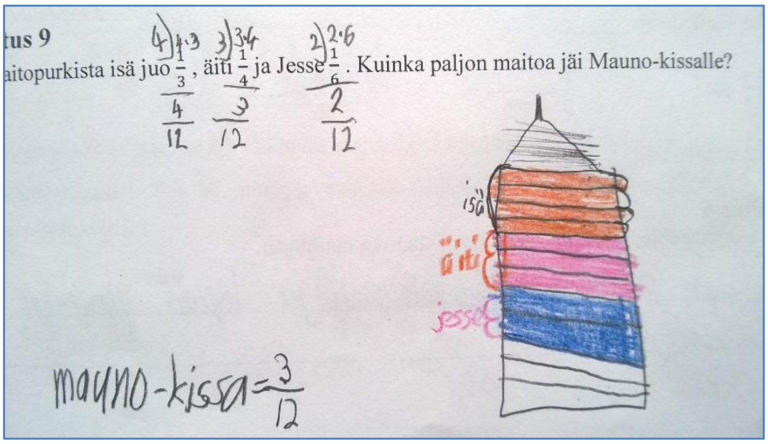
Toisesta testiryhmästä seitsemän oppilasta ei lähtenyt yrittämään selittämistä. Kuusi oppilasta vastasi löytävänsä yhteisen nimittäjän ”*miettimällä eri kertotauluja*”. Suuri osa ”*kertoi*”, ”*katsoi nimittäjistä*”, ”*laski*” sekä ”*tutki ja mietti*”. ”*Rupean käymään isoimman nimittäjän kertotaulua läpi ja kun muiden nimittäjien kertotaulut sopivat isoimman nimittäjän kertotauluun, saa vastauksen.* (OP2)”

Viimeisellä sivulla olivat **harjoitukset 7 -9**. Ensimmäinen testiryhmä ei ehtinyt viimeisiä harjoituksia juuri tekemään. Kommenttejakin tuli vähänlaisesti. Harjoitus7:sta todettiin lyhyesti: *”Tärkee”* (OP2). Kommentti harjoituksesta 8, jossa erikseen kannustettiin piirtämään, oli seuraava: *”Lapset piirtävät mieluummin kuin kirjoittavat. Hyvä!”* (OP24) Tunnin viimeinen harjoitus oli numero 9. Siinä piti pohtia Mauno-kissan maito-osuutta. Siitä tykättiin kommentein: *”Toimii”* (OP2) ja *”Hyvä! +++”* (OP21). Koko tuntimateriaalia koskeva kommentti oli OP17:lla: *”Melkein kaikissa tehtävissä oli huonot tehtävänannot.”*

Harjoituksia muokattiin selkeämmiksi ja poistettiin turhia ja häiritseviä tekijöitä, jotta tärkein harjoittelu tulisi selkeämmin esille. Toisen testiryhmän oppilailta tulikin mukavia palautteita ja esimerkiksi **harjoituksessa 7** oli kommentti: ”*Helppo laskee!*”, vaikka oppilas ei lopulta tehtävää tehnytkään.

Harjoituksen 8 ratkaisemiseen ei tehty kovin montaa yritystä. Lukujen $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{5}$ välistä löydettiin kovin erilaisia vastauksia. Poikkeavin vastaus oli seuraava: $\frac{1}{4}\ \frac{2}{4}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{4}\ \frac{1}{5}$

Harjoituksessa 9 Mauno-kissa sai maitonsa vain kolmelta oppilaalta. Määrät vaihtelivat yhdeksän kahdestoistaosaa (OP20), kymmenen kolmastoistaosaa (OP23) ja kolme kahdestoistaosaa (OP16). Yksi oppilas piirsi laskunsa (KUVIO17).



KUVIO 16. Mauno-kissan maito-osuutta laski OP16.

IV. Neljännen tunnin tehtävät ja palautteet

Neljännen tunnin jälkeen ensimmäisen testiryhmän oppilaat eivät saaneet varsinaista tuntipalautelomaketta. Palautteista, jotka on kirjoitettu opetusmateriaalin sivuille, voi huomata, että kirjoittaminen alkaa sujua paljon helpommin kuin ensimmäisellä tunnilla. Vastaukset eivät ehkä olleet kaikkein loogisimpia, mutta lauserakenteita alkoi vastauksissa olla niin, että oppilas näin voi jo paremmin ilmaista ajatuksiaan. Neljän tunnin opetuspaketti sisälsi kymmenittäin ”*en tajuu*”, ”*en osaa*” *ja* ”*?*” kommentteja. Koska aikaa oli rajallisesti ja kyseessä oli viidesluokkalaisia oppilaita, ei syvemmän palautteen saaminen ollut enää realistista. Kouluvuosi oli jo lopuillaan ja oppilaiden kevätväsymys näkyi selvästi tuntityöskentelyssä.

Toisen testiryhmän kanssa neljä ensimmäistä harjoitusta käytiin oppilaiden kanssa yhdessä läpi. Oppilaat jatkoivat harjoituksia sen jälkeen itsenäisesti oman mielensä mukaisessa järjestyksessä. Harjoituksia 9 ja 11 pidettiin mukavina. Harjoituksen 9 pitsojen piirtäminen oli ollut kivaa ja harjoitus 11 oli ollut helppo. Tykättyjä harjoituksia olivat myös 2, 4, 6, 8, 13 ja 14. Useimmiten selitys harjoituksen mukavuudelle oli se, että tehtävä oli helppo.

Viimeisen tehtävänipun harjoituksista huonoiksi mainittiin ”hankalat”, ”vaikeat” ja harjoitukset, joita ei ymmärretty tai osattu. Mainittiin esiintyvyysjärjestyksessään 10, 9, 17, 5, 6, 12 ja 16.

Harjoitus 1 ei tuonut esille mitään palautetta. Oppilaat ohittivat sen kommentoimatta sekä ensimmäisessä testiryhmässä että toisessa testiryhmässä. Konkreettisilla murtopaloilla touhuaminen ja teoriatekstin täyttäminen tuntuivat tutkijan näkökulmasta onnistuneilta tehtäviltä.

Harjoitus 2 kohdalla kysyttiin, mitä kannattaa huomioida, kun muuntaa murtokulua seka-luvuksi? Oppilaiden ajatuksia aiheesta olivat

"että monta kokonaista on." (OP12)

"nimittäjä" (OP13),

"kuinka monta jää yli ja voiko edes muuttaa sekaluvuksi" (OP9),

"Että mikä numero nimittä on sillä silloin tietää, että montako palaa tarvitaan kokonaiseen." (OP25) ja

"Että tulee oikea määrä numeroita" (OP2).

Toinen testityhmä kirjoitti murtoluvun muuttamisesta sekaluvuksi seuraavia ohjeita:

" *että jakaa tai kertoo*" (OP3)

"*Lasketaan kuinka monta osaa tarvitaan kokonaiseen.*" (OP11)

"*Pitää huomioida montako kokonaista siitä tulee ja myös montako jää jäljelle.*"(OP19)

"*Lasketaan kuinka nimittäjä menee osoittajaan.*" (OP12)

"*Sekaluvun tulos sanotaan erilailla kuin murtoluvun.*" (OP7)

"Minä jaan osoittajan nimittäjään. Osamäärä on kokonaiset ja jakojäännös on murtoluku."(OP2)

"Täytyy huomioida montako kokonaista ja jää yli." (OP18)

"Kuinka monta osia sinne menee ja ottaa huomion nimittäjän." (OP4)

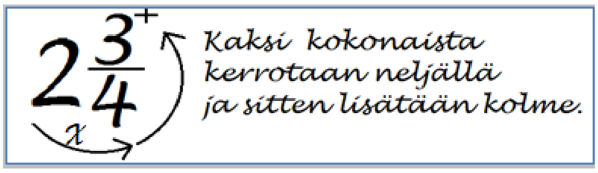
"Lasketaan kuinka monta kokonaista tulee. Mietitään kuinka monta kertaa nimittäjä menee osoittajaan. Sitten katsotaan, kuinka paljon jää yli." (OP10)

"Pitää huomioida mikä luku on nimittäjänä." (OP14)

Harjoituksessa 3 piti muuttaa murtoluvut sekaluvuiksi. Ensimmäisen testiryhmän oppilaat antoivat puhtaasti positiivista palautetta: *"oli helppo tehtävä, sillä oli helppoja laskuja ja ymmärsin kaiken." (OP25) ja "Tämä oli helppo, koska ymmärsin." (OP4)* Edellä oli sarjakuvamuodossa oleva malli muuntamisesta.

Harjoitus 4 tehtiin vuoropuheluna materiaalin hahmojen kanssa. Hahmojen lisäksi oppilas OP10 toivoi vielä konkretisoivaa kuvaa mukaan. Se, mikä tämä konkreettinen olisi, ei selvinnyt.

”Kiertokuva”, jossa havainnollistetaan yhden kuvan avulla sekaluvun muuttaminen murtoluvuksi, sai sekä positiivisia että negatiivisia kommentteja. Osa piti mallia jopa *”erinomaisena”.* Murtoluvun havainnollistamiseen tarjotaan erilaisia tapoja ja tällainen ”kiertokuva” voi olla jollekin se, joka auttaa ymmärtämään, mitä matemaattista tapahtuu sekalukujen muuttamisessa murtoluvuksi.



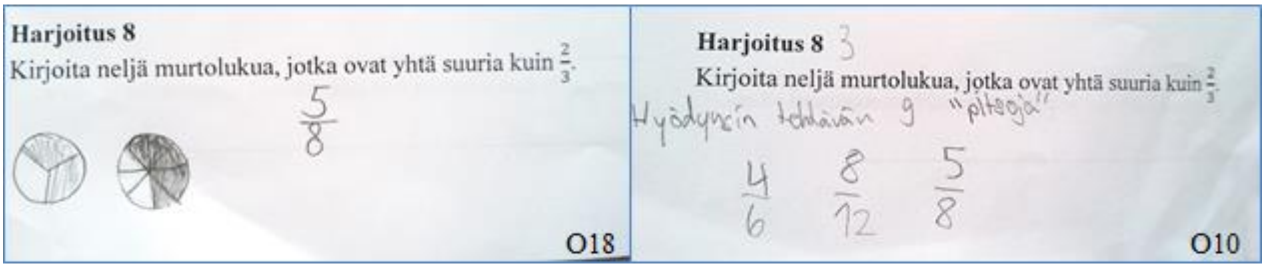
KUVIO 17. Sekaluvun muuttaminen murtoluvuksi.

Moni harjoitus jäi ensimmäisen testiryhmän oppilailta tekemättä, mutta palautetta tuli kuitenkin. Sanallisena annetut mekaaniset tehtävät herättivät tunteita. Tehtävät annettiin sanallisessa muodossa ja vastaustila oli tyhjä ilman tekstirajoitetta. Oppilaat eivät alkaneet tehdä tehtäviä, mutta palautteet *”Mahtavaa!”, ”ei tajua”, ”Epäselvä”, ”OK”, ”en ymmärrä”, ”Toimii”, ”helppoja laskuja monille”, ”vaikea ymmärtää tehtävänantoa” ja ”Näitä tehtäviä on liikaa joka monisteessa”* osoittavat, että oppilaat ottivat hyvin eri tavalla tehtävät. Oppilaat kaipasivat myös selkeää mallia harjoitus 7 kohdalla. Se olisi helpottanut monen tehtävänratkaisua. Viimeiseen versioon malli lisättiin jo edeltävän tehtävän yhteyteen ja oppilaiden vastaamista helpottamaan.

Toisen testiryhmän kohdalla oppilaita kannustettiin tekemään harjoituksia silmämääräisesti sen mukaan, mitkä tuntuivat mukavilta. Oppilaita pyydettiin numeroimaan tehtävät suoritusjärjestyksessään. Suurin osa oppilaista osasi numeroida tehtäviä sitä mukaa, kun he etenivät työskentelyssä. Kolmessa monistenipussa ei ollut numerointeja, joten näiden oppilaiden järjestystoiveita ei voida huomioida.

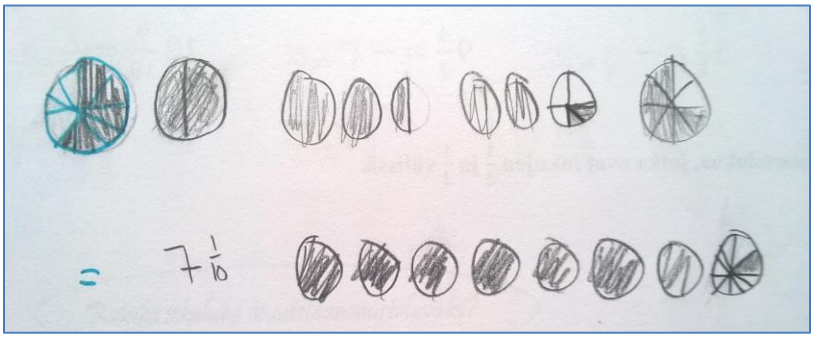
Kaksi suosituinta aloitustehtävää olivat harjoitukset 9 ja 17. Yli puolet oppilasta joko aloitti tai teki toisena harjoituksen 9. Viisi oppilasta joko aloitti tai teki toisena harjoituksen 17. Neljä oppilaista aloitti harjoituksella 6 tai 13 ja harjoituksella 8 ja 15 aloitti kaksi oppilasta. Kolmantena tai neljäntenä tehtiin mieluiten harjoitukset 13 ja 16. Kahdeksan oppilasta ehti aloittaa vähintään 5 harjoitusta lopputunnin aikana. Vain kaksi ehti tehdä 7 eri harjoitusta.

Harjoituksessa 8 saatiin toisen testiryhmän vastauksista suuntaa siihen, miten oppilaat saattavat vastata tehtävään. O18 vastasi kysymykseen varsin silmämääräisesti (KUVIO 19). Vastaus on hyvin lähellä todellisuutta, mutta ihan tarkkaa vastausta ei katsomalla saatu. O10 hyödynsi omien sanojensa mukaan harjoituksen 9 pitsoja.

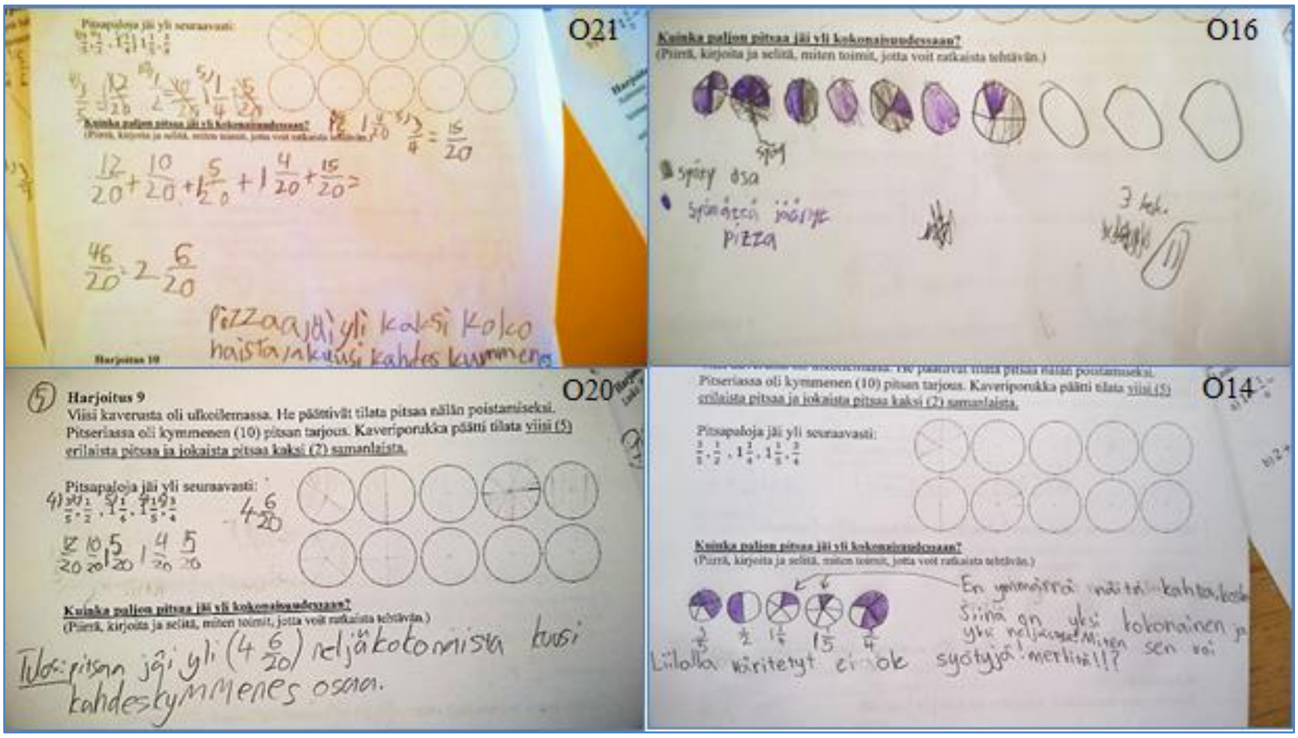


KUVIO 18. O18 ja O10 ”ratkaisivat” murtolukutehtävää varsin luovasti.

Harjoitus 9 käsitteli kaveriporukan pitsareissua ja se innoitti antamaan palautetta, mutta useampi yritti myös vastata. Ensimmäisessä testiryhmässä ei ollut juuri minkäänlaisia laskutoimituksia. Vain yhden oppilaan paperissa oli piirustus aiheesta. Vastaukset olivat arvailuja ja harjoituksessa saattoi olla myös vain pelkkä vastausluku. Kommentit *”hankala”(*2 kertaa*), ”vaikea ymmärtää”, ”epäselvä tehtävä”, ”vaikea tehdä ja todella haastava”, ”en tajua”,* kertovat tehtävän olevan vaikea. Yksi vastaaja piti tehtävästä kommentoimalla: ”nerokas!” Tehtävän ratkaisijoiden vastaukset tarjosivat muun muassa seuraavia: $7\frac{1}{10}$, $7\frac{4}{5}$, $2\frac{9}{20}$, 1, paljon ja jonkin verran.



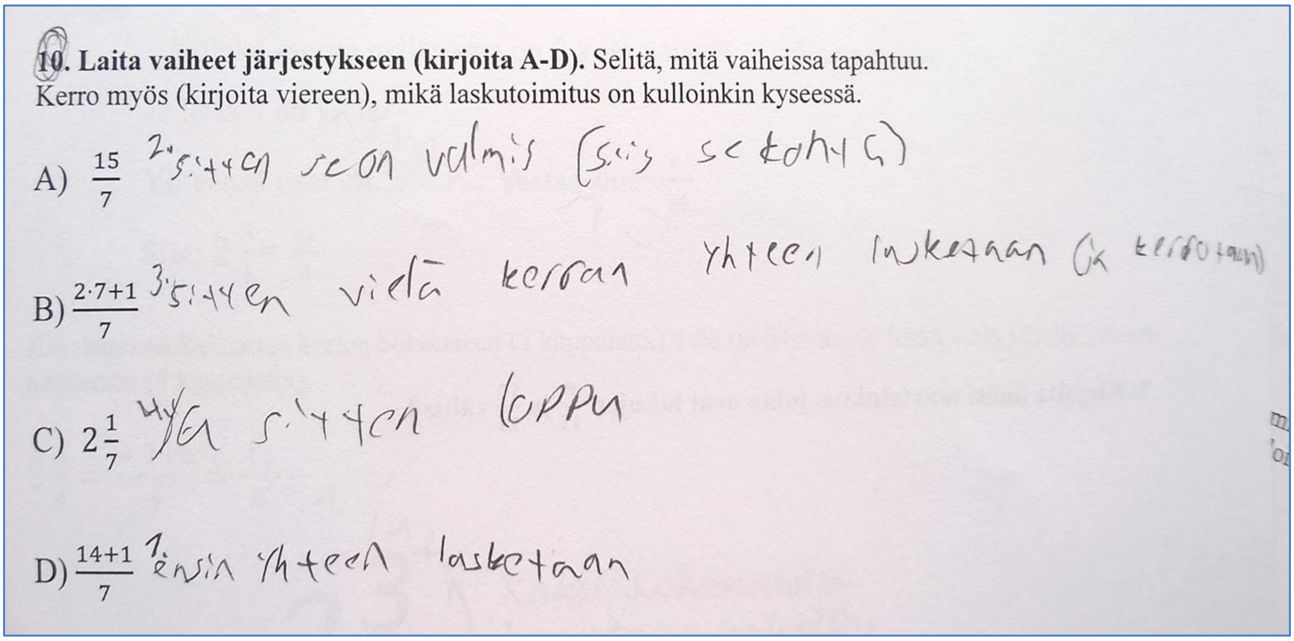
KUVIO 19. Ensimmäisen testiryhmän OP13 vastaus harjoitukseen 9.



KUVIO 20. Toisen testiryhmän vastauksia harjoitukseen 9.

Se, että ensimmäisen testiryhmän palautteissa oli saada valmiita ympyröitä kuvaamaan pitsoja, ei ollut juuri apua, kun toinen testiryhmä teki harjoitusta 9. Kuten KUVIO 21 osoittaa, O14 oli piirtänyt omat ympyrät, vaikka valmista kuviota oli monisteessa. Tehtävä oli muutoinkin varsin haastava.

Harjoituksessa 10 oppilaat yrittivät ratkaista oikeaa laskujärjestystä. Vaiheita oli annettu 4 ja vain yksi oppilas ensimmäisessä testiryhmässä oli sanallistanut vaiheet monisteeseensa. Tehtävää pidettiin *"haastavana ja kivana"*. Lopulliseksi laskujärjestykseksi tarjottiin 7 eri versiota. Koska tarjotuissa vastauksissa ei ollut perusteluja, voi tutkija ajatella, että oppilaat aivan kuin arpoivat oikeaa riviä. Toisesta testiryhmästä saatiin palaute O11:lta: *"Kiva tehtävä, mutta en pääse kunnollla jyvälle."*



10. Laita vaiheet järjestykseen (kirjoita A-D). Selitä, mitä vaiheissa tapahtuu.
Kerro myös (kirjoita viereen), mikä laskutoimitus on kulloinkin kyseessä.

A) $\frac{15}{7}$ 2. sitten se on valmis (siis se tehty G)

B) $\frac{2 \cdot 7+1}{7}$ 3. sitten vielä kerran yhteen lasketaan (ja kerrotaan)

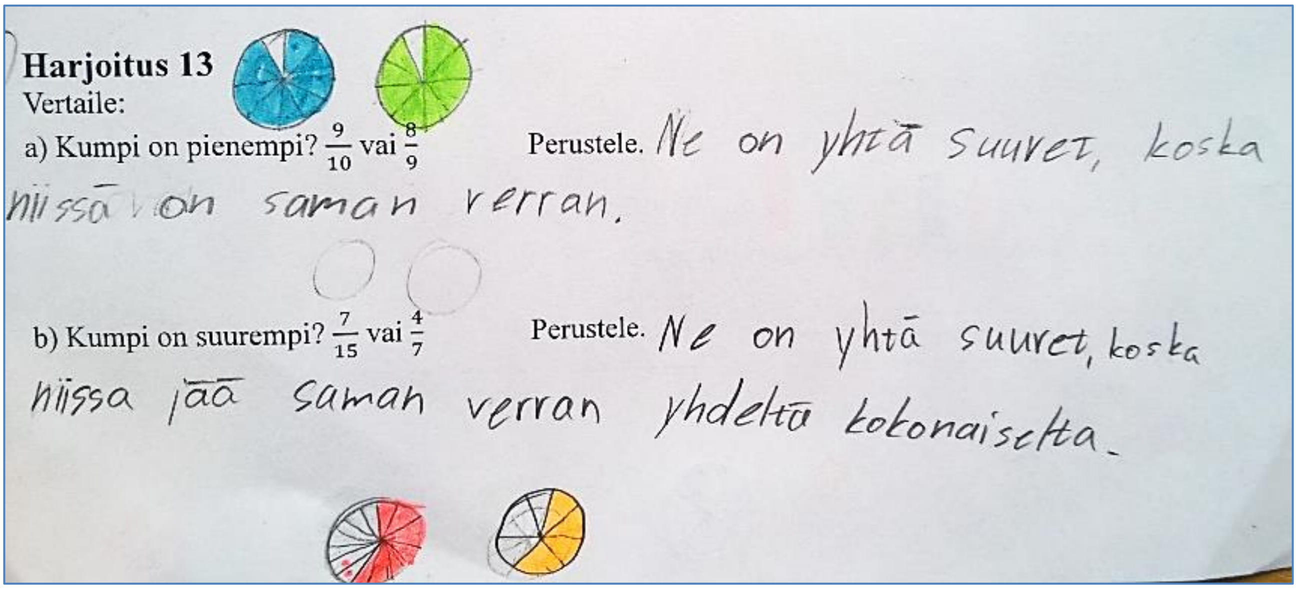
C) $2\frac{1}{7}$ 4. ja sitten loppu

D) $\frac{14+1}{7}$ 1. ensin yhteen lasketaan

KUVIO 21. OP2 sanallisti lausekkeita harjoituksessa 14.

Harjoitusta 12 oppilaat yrittivät ratkaista pitkälti arvaamalla. Kertomus asiakkaan ja myyjän tapaamisesta ja antennin hinnannoususta ei tuottanut yhtään sanallista vastausta, kuvaa tai laskua. Yksittäiset vastaukset olivat: 40 € (2 kertaa), 41€ ehkä?, 42€, 43€. Yksi vastaaja yritti selittää kirjoittamalla $\frac{2}{7}$ enemmän eli 60€. Tehtävälle annettiin yksi kommentti ja se oli: ”*Mukava suullinen tehtävä*” (OP2). Myöskään toisessa testiryhmässä ei saatu näyttävämpiä vastauksia. Tyhjässä tilassa oli vain vastaukseksi tarkoitettu numero tai lyhyen laskun tulokseksi saatiin laskemalla 30€, 40€, 43€ ja 210€. Puhdas arvaus oli yhdellä oppilaalla 40€.

Harjoitus 13 vastausnäyte on toisesta testiryhmästä (KUVIO 23). O4 päätti ratkaista tehtävän käsin piirretyn ympyrän perusteella. Silmämääräinen tarkistelu ei ehkä sittenkään riittänyt.



KUVIO 22. Oppilas O4 piirsi vertailutehtävässä ympyrät ja silmämääräisesti päätteli annettujen lukujen olevan samansuuruiset.

Harjoituksessa 14 osoittajaa ja nimittäjää kasvatettiin yhdellä. Kysymys kuului: Kuinka paljon murtoluku kasvaa? ”*3/6=½ siitä puolikas luku vähän niinku puolikas!* (OP25), ”*no oisko vaikka yhden*” (OP26).

Harjoitus 15 oli mekaaninen murtolukutehtävä ja jäi ilman palautteita. Tehtävää ei myöskään muutettu lainkaan kummassakaan korjausvaiheessa.

Harjoituksessa 16 piti sijoittaa murtolukuja mahdollisimman tarkasti. ”*En ole ikinä tehnyt*” (OP6), oli kommentti. 7 oppilasta yritti sijoittaa lukuja annetulle lukusuoralle, mutta heistä kukaan ei ollut laventanut lukuja tai muokannut niitä helpommin käsiteltävään muotoon. Oppilailta ei tullut enää merkintöjä viimeisiin tehtäviin. Lukusuoran käyttäminen saattaa jäädä joissain kouluissa kokonaan harjoittelematta, koska kaikki matematiikan kirjasarjat eivät sitä tuo esille lainkaan.

5.2 Luokanopettajan näkökulma oppilaiden tekemiin murtolukutehtäviin

Oppilaiden työskennellessä tutkijan oli mahdollista myös kuulla luokanopettajan mielipiteitä ja hänen havaintojaan. Opettajan mielestä luokka oli varsin vilkas, mutta osasi myös tehdä itsenäisesti työtä. Tehtäviä tehdessään oppilaat osasivat viitata ja opettaja kohtasi tutkijan ohella oppilaat tehtäviensä parissa.

Syyskuussa opetusmateriaalin käyttöä seurannut luokanopettaja ajatteli, että oppilaat pitivät tunneista ja tehtävistä. Ne toivat myös vaihtelua matematiikan tunteihin. Tehtävien vaikeustaso tuntui sopivalta. Haasteitakin löytyi, kun tehtävänä oli esimerkiksi järjestää lukuja, kun mukavan oli murto-, desimaali- ja prosenttilukuja. Opettaja piti sitä hyvänä ponnisteluna ylöspäin. Oppilaiden oli hyvä huomata, että tehtävät tästä eteenpäin vain vaikeutuisivat. Oppilaita helpotti ajatus, ettei kaikkia tehtäviä ollut tarkoitus osatakaan. Onnistumisen kokemuksia jokainen oppilas sai helppojen tehtävien osalta. Myös kokeilevat tehtävät olivat mukavia. Myöhemmin syksyllä luokka opiskeli uudelleen murtolukuja oppikirjaohjelman mukaan. Käsitteet olivat nyt oppilaille hyvin tuttuja ja ensimmäiset kappaleet luokka oli ”mennyt läpi tuosta vain”. Soveltamisen vaikeus oli edelleen osalle vaikeaa, mutta asenne oli kaikilla myönteinen ja luottavainen. Luokanopettaja uskoo, että tekemäni oppimateriaali oli ollut hyväksi hyödyksi. Tulevaisuudessa oppimateriaali voisi olla opettajan käytössä. Hän ajatteli, että jakaisi tehtävät pienempii nippuihin, jolloin lisää tehtäviä saa, kun edelliset on tehty. Moni oppilas voi pitää paksua monistenippua säikäyttävänä. Voi tulla tunne kuin lähtisi meren yli uimaan. Toiminnallisuus oli kiva juttu ja sitä voisi opettajan mielestä olla vieläkin enemmän. Myös pari- ja ryhmätöitä voisi olla enemmän.

5.3 ”Mistä rima on matalin”

Syyskuun testiryhmän tuntipalautteen perusteella helpot harjoitukset ovat mukavia ja kivoja. Mikäli jokin harjoitus on suuritöinen, eli se vaatii kynätyöskentelyä ja pohtimista, se tulkitaan vaikeaksi ja palaute on helposti ”en ymmärrä”. Haastavien harjoitusten kohdalla oli muutamia positiivisia palautteita. Sanallisesti oppilaat kirjoittivat, että vaikka tehtävä oli ollut vaikea, he olivat oivaltaneet jotain oleellista murtoluvuista. Muutamassa vastauksessa oli myös mainittu, että ensin harjoitus oli ollut vaikea, mutta sitten sitä oli ollut kiva tehdä.

Oppilaat pitivät piirtämisestä ja värittämisestä. Viidesluokkalaisille sopii varsin hyvin värimaailman käyttö. Ensimmäinen testiryhmä koki isona haasteena harpin käytön, mutta jälkimmäinen ryhmä ei antanut harpista negatiivista palautetta. Ensimmäinen ryhmä intoutui piirtämään useammin kuin jälkimmäinen ryhmä, jonka vastauksissa oli selvästi useammin yritetty päästä mahdollisimman puhtain paperein harjoituksen loppuun saakka.

Ajattelen, että oppilaat toivoisivat helppoja tehtäviä, joiden parissa ei tarvitsisi pohtia ja tuhlata aikaa. Suuritöisempien tehtävien monimuotoisuutta pidetään ajan tuhlaamisena ja koska lopputuloksen näkyminen on pitkän ajan takana, oppilaalle jää mielikuva, ettei hän ole edes tehnyt mitään. Mitä enemmän sivuja tulee ”täytettyä”, sitä tehokkaammalta tuntuu oppilaiden mielestä työskentely. Monimuotoisten tehtävien kohdalla hyvin harva oppilas lähti purkamaan laskuja ja kokeilemaan erilaisia tapoja ratkaista annettua tehtävä. Muuntotehtävissä oppilaat luottivat aivan liian usein intuitioon siitä, miten suuri jokin luku oli. He eivät vaivautuneet tarkistamaan laskemalla, oliko heidän arvauksensa osunut lainkaan oikeaan suuntaan. Toinen näkökulma tehtävän vaikeuteen tuli myös esille. Jos tehtävä oli ”liian helppo”, se ei myöskään ollut mieleinen. Oikean haasteellisuustason löytäminen onkin varmasti haasteellisinta uusien tehtävien suunnittelussa. Oppilailla pitäisi pysyä mielenkiinto yllä tehtävän loppuun asti. Liian vaikean tehtävän edessä oppilas luovuttaa ja tehtävä jää tekemättä. Liian helppo tehtävä ei motivoi kehittämään itseään.

Jälkimmäinen testiryhmä toimi kuten oppimistilanteessa tulisikin toimia. Kuitenkin, monessa vastauksessa oli kommentti: ”en ymmärrä”. Oppilaat päätyivät tekemään tehtäviä ja pulmatilanteen kohdalla eivät kysyneetkään apua vaan jättivät viittaamisen tekemättä. He etenivät opetusmateriaalia järjestyksessä, ja kolme ensimmäistä monistetta oli rakennettu niin, että harjoitukset tukivat toisiaan, kun ne tehdään järjestyksessä. Vain viimeisessä monistenipussa harjoitusten järjestyksellä ei ensimmäisten neljän jälkeen ollut merkitystä. Luokan oma opettaja havainnollisti laventamista taululle kuvan avulla.

Neljännen tunnin harjoitusten toivejärjestys yllätti. Oppilaat näkivät mielenkiintoiset tehtävät hyvin eri tavalla. Vaihtelevuutta luokan sisällä oli aika paljon ja se loi haasteita laittaa harjoitukset sellaiseen järjestykseen, että ne vastaisivat suurelta osin yleisesti kiinnostavia tehtäviä. Toki tulevaisuudessakin neljännen tunnin harjoitukset voisivat olla vapaassa järjestyksessä tehtäviä.

Oppilaiden mielikuva siitä, millaisina he pitivät tehtäviä vaikeudeltaan, osoitti jälkimmäisen testiryhmän kohdalla, että alussa tehtävät tuntuivat helpoilta. Keskiarvosanaksi annettiin ka 3,45. Toisen tunnin jälkeen keskiarvo oli 2,67 ja kolmannen tunnin jälkeen se oli 3,14. Viimeisen tunnin keskiarvo oli 2,9. Viimeisellä tunnilla oppilaat eivät tehneet tehtäviä enää ryhmissä, vaan työskentely oli itsenäisempää. Se, että vaihtelu oli merkittävää, voisi osoittaa sen, että joko tuntien harjoitusten vaikeustaso vaihtelee kovasti tai oppilaiden tapa kohdata harjoitukset vaihteli syystä tai toisesta.

6 OMIA PÄÄTELMIÄ

Pro gradu –projektin alkuvaiheessa en osannut lainkaan tiedostaa, miten pieniin asioihin oppilaat voivat kompastua matematiikan tehtäviä tehdessään. Työn päättyessä huomasin, miten tehtävät olivat löytäneet uudenlaisia ulkoasuja ja sanamuodot tulleet selkeämmiksi. Harjoitusten numerointi oli haastava urakka, kun teorian ja harjoitusten vuoropuhelua pyrin pitämään joustavana ja eteenpäin vievänä. Huolellisuutta vaati sekin, että tehtävät olisivat loogisessa järjestyksessä. viimeisen tunnin tehtävien järjestystä jäin pohtimaan. Lopullinen järjestys muotoutui syyskuun 2017 testiluokan mieltymyksiä myötäillen. Teoriaosuuden jälkeen ensimmäisiksi tehtäviksi sijoitin sellaisia, jotka tuntuivat oppilaista mukavilta ja myös helpommilta. Viimeiset tehtävät jäivät ylöspäin eriyttämistä ajatellen. Tehtäviä oli tarkoituksella paljon, jotta jokainen oppilas saisi tekemistä ja mielellään mielekästä tekemistä.

Ensimmäisen oppitunnin kellonaikatehtävää helpotin aika paljon alkuperäisestään. Sieltä poistuivat 22,5 ja yksi kolmasosa, koska siitä ei tule sadasosina tasalukua. Se tuntui olleen muutenkin haastavimmasta päästä oleva harjoitus. Myös tehtävää, jossa olivat mukana murtoluvut, desimaaliluvut ja prosentit, jouduin helpottamaan. Matematiikan oppikirjojen opetusjärjestys on ollut sellainen, että prosentit tulevat varsin myöhäisessä vaiheessa lukuvuotta, vasta murtolukujen jälkeen. Vaihdoin haastavimpien murtolukujen tilalle vain puolikasta ja neljännestä vastaavat luvut.

Oli hyvä huomata, että ohjeistuksen pitää olla vedenpitävä. Harjoitusten ohjeistuksessa ei saa olla epäselvyyttä. Ei voi olettaa, että oppilas tiedostaa harjoittelevansa murtolukuja ja siten esimerkiksi tehtävä, jossa pitää jakaa ympyrä osiin, oli lisättävä sanat ”yhtä suuriin”, jotteivät oppilaat jatkossa piirrä spiraaleja tai sisäkkäisiä ympyröitä murtolukutehtäviin. Haastavaa oli myös hahmottaa tilan tarvetta eri tehtäville. Se, että testasin tehtäviä kahdessa eri tilanteessa, paransi huomattavasti tilan hyödyntämistä. Oppilaiden käsialat vaihtelivat ja oppilaat, jotka sekä piirsivät että kirjoittivat, käyttivät runsaasti tilaa. Turhaakaan tilaa ei opetusmateriaalin sivuille kannattanut jättää, jotta turha paperi olisi minimissään.

Pidin hyvänä sitä, että minulla oli hyvät muistiinpanot jokaiselta tunnilta ja reflektoin myös omaa tekemistä varsin tiiviisti.

Oppilaat suhtautuivat pienellä varauksella murtolukulaskuihin. Vaihteluväli oli ensimmäisessä testiryhmässä suurta, kuten oli myös taitotaso testissä. Neljän oppitunnin kokonaisuus ei muuttanut juurikaan oppilaiden asenteita. Joissain tapauksissa mielenkiinto lisääntyi. Muutamat oppilaat kokivat kielentämisen ei-matematiikkaan kuuluvana osa-alueena, joten tutkimuksen yksi tehtävä oli tutustuttaa oppilaat yhteen vähemmän käytettyyn matematiikan kieleen.

6.1 Tutkimuksen eettisyys

Tutkimus aloitettiin molemmissa tutkimusluokissa tutkimusluvan pyytämisellä. Ensimmäisen testiryhmän tutkimuslupa tuli koulun rehtorilta. Kevään ryhmästä tutkimuslupa jäi uupumaan viideltä oppilaalta, kun luokassa oli yhteensä 27 oppilasta. Myös syksyn ryhmän oppilaat saivat kaavakkeen kotiin vietäväksi. Tutkimuslupa luokkaan oli saatu koulutoimelta. Määräpäivään mennessä vielä yhdeksän lupalappua puuttui, mutta ensimmäiseen tapaamiseen mennessä lupalappuja puuttui enää kolme. Tästä luokasta sain myös hyvän materiaalin. Oli mielenkiintoista huomata, miten erilainen toimintakulttuuri oli kahden eri koulun välillä tutkimusluvan hakemisen suhteen. Rehtorit molemmissa kouluissa olivat myönteisellä asenteella ja lupa heidän tahoiltaan tuli helposti. Ensimmäisessä tutkimuskoulussa byrokratia oli matalampaa ja opettajalla oli vahva asema, kun tutkimuslupaa selvitettiin. Toisessa koulussa tutkimusluvan saaminen oli haasteellisempaa ja vei enemmän aikaa.

Oppilaiden henkilötietojen peittäminen tutkimuksen esittämisvaiheessa tehtiin niin, että nimikirjaimilla merkityt palautelaput (Liite 4) ja muut materiaalit muutettiin oppilasnumeroiksi. Numerointi tehtiin vielä niin, että nimilistan järjestystä vielä muutettiin ja näin sattumanvaraisuus voitiin vielä paremmin taata. Oppilaiden henkilötietojen yhdistäminen palautuksiin on mahdollista vain nimilistan avulla ja sitä pidetään erillään muusta palautusmateriaalista. Vain tutkija voi yhdistää nämä tiedot toisiinsa.

6.2 Oppimateriaalin tuottamisen haasteita tässä työssä

Mitä muutin ensimmäisen tarkistuskierroksen jälkeen toukokuussa 2017? Oppilaiden palautteiden perusteella jouduin lukemaan useaan kertaan jokaisen tehtävänannon. Oppilaat ehdottivat hienosti heidän tasolleen sopivampia sanamuotoja, oppilailta tuli huomautusta siitä, että heidän oli vaikea erottaa vuoropuheluiden ja varsinaisten tehtävien eroa. Viimeisimmässä versiossa jokainen harjoitus on merkitty selvästi ja vuoropuheluiden ohessa olevat pienet tehtävät löytyvät helpommin.

Tehtävien vaikeustasoa jouduin vähän laskemaan kellonaikatehtävän kohdalla. Ensimmäisessä versiossa kellonajoista pyydetyt murtoluvut osoittautuivat aivan liian vaikeiksi. Yhteensä yli 40 oppilaasta vain alle viisi oppilasta pystyi edes jotenkin hallitsemaan muuntamista kellonaikojen osalta. Siinä tarvitaan muutakin osaamista kuin murtolukujen hallintaa. Kellon 60-järjestelmän hallinta pitää olla hallussa, jotta muuttaminen onnistuu. Ensimmäisessä versiossa olleet 22,5 min, 36 min ja $\frac{5}{12}$ muuttamiset murtoluvuiksi, desimaaliluvuiksi ja minuuteiksi poistettiin kokonaan. Tehtävään lisättiin 30 minuutin ilmoittaminen murtolukuna ja desimaalilukuna. $\frac{5}{12}$ muutettiin muotoon $\frac{1}{5}$. (Viimeisessä versiossa I tunnin harjoitus 10.)

Toisen tunnin ensimmäinen tehtävä oli alun perin suoraa tekstiä ja oppilaan tuli itse selvittää työvaiheet. Viimeisessä versiossa tehtävä on purettu osiin ja ohjattu aakkosilla etenemisjärjestys. Sanamuodot muutettiin yksiselitteisiksi ja vastauskohdat selkeiksi. Harjoitus 5 helpotettiin lukujen osalta myös. Tehtävässä piti laittaa eri muotoisia lukuja suuruusjärjestykseen. Tarjolla olleita lukuja oli erittäin vaikea hahmottaa ja esimerkiksi 15% muutettiin 25%:ksi, 30% ja 85% poistettiin ja tilalle laitettiin 50%.

Tehtävän uudelleen muokkaus tapahtui esimerkiksi ensimmäisen tunnin neljännen harjoituksen kohdalla. Alun perin tehtävä kuului seuraavasti:
”Miten selittäisit luvun $\frac{3}{4}$? Voit piirtää ja kuvittaa. Voit käyttää apuna vuoropuhelua, sarjakuvaa, matemaattista perustelua. Voit myös kertoa, missä luvun käyttö näkyy tai ilmenee.” Tehtävä osoittautui hankalaksi. Oppilas, joka varmasti hallitsi murtoluvun neljänneksen puuttumisen, päätyi vain piirtämään yhä uuden ympyrän, josta oli väritetty kolme neljäsosaa. Tehtävä muutettiin seuraavanlaiseksi: ”Piirrä kakku harppia tai ympyrämuottia apuna käyttäen. Jaa kakku neljään osaan. Väritä kolme osaa vihreällä. Miten ilmoittaisit värittämäsi alueen matematiikan kielellä?” Tämäkään versio ei vielä toiminut. Oppilaat lukivat luovasti tehtävänannon ja lopputulos on kuvion 8 kaltainen. Ympyrät E, F ja G on toki jaettu neljään osaan, muttei toivotulla tavalla. Tehtävänantoon lisättiin ”yhtä” sana, joka ohjeisti siten jakamaan ”neljään yhtä suureen osaan”.

Kaikkia toiveita ei vielä toteutettu. Esimerkiksi joitain oppilaiden toivomia havainnollistamiskuvia ei ole vielä valmistunut opetuspakettiin. Kuvaa toivottiin muun muassa neljännen tunnin teoriaosuuden ja tehtävän yhteyteen. Yhteen tehtävään valmistui esimerkki oppilaiden toivomuksen mukaan. Esimerkistä saattaa saada apua tehtävän ratkaisemiseksi, vaikka se ei annakaan suoraa mallia työskentelyyn.

6.3 Tulevaisuudensuunnitelmia oppimateriaalin suhteen

Tämän pro gradun työn tuloksena syntynyt oppimateriaali voisi toimia ponnahduksena lisämateriaalin tuottamiselle. Alkuperäisen innoittajan mukaan materiaaliin voisi toteuttaa lisämateriaalia, joka toimisi esimerkiksi tunneilla mielenkiinnon herättäjänä. Esimerkiksi videomateriaali voisi sisältää opetusmateriaalin hahmojen vuoropuhelua arjen ongelmatilanteissa. Lapset ja opettaja kohtaisivat erilaisia haasteita, joita murtolukulaskemisen avulla ratkaistaan. Myös konkreettisen lisämateriaalin valmistaminen toisi oppitunneille uudenlaita tekemistä. Uuden opetussuunnitelman mukaisesti voitaisiin kehittää opetusmateriaalia, joita oppilaat toteuttaisivat muun muassa kuvaamataidon tai maantiedon oppikokonaisuuksien parissa. Kun oppilaat tekevät murtolukutehtäviä eri oppiaineissa, niiden käytettävyys oikeassa arkielämässäkin tulisi tutummaksi.

Mielenkiintoista olisi tehdä tutkimus siitä, miten oppilaat suhtautuvat sanoihin ”harjoitus” ja ”tehtävä”. Mitä eroa on näiden kahden sanan käytössä ja millaisen mielikuvan nämä sanat antavat oppilaalle matematiikan tehtäviä nimettäessä? Voitaisiinko harjoitus mieltää eräänlaiseksi treeniksi, jossa olisi mahdollisuus myös epäonnistua? Onko tehtävä se ”suoritettava” asia, jonka jälkeen asiat on hoidettu?

LÄHTEET

Ahtee, M., Hannula, M., Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, E., Portaankorva-Koivisto, P., Wass, S. (toim.) 2015. Iloa ongelmanratkaisuun. Kustannusosakeyhtiö Otava. 4–5

Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Edita. Helsinki. 18

Bauersfeld, H. 1995. ”Language games” in the mathematics classroom: their function and their effects. Julkaisussa P. Cobb, H. Bauersfeld (toim.) The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures. 271-294

Cramer, K & Wyberg, T. 2007. When Getting the Right Answer Is not Always Enough: Connecting How Students Order Franctions and Estimate Sums and Differences. Teoksessa W. G. Martin, M. E. Strutchens ja P. C. Elliot. The learning of Mathematics. Sixty-ninth Yearbook. 205–220

Edelson, D.C. 2002. Design research: What we learn when we engage in design. The Jounal of the Laeaning Sciences. https://www-tandfonline-com.helios.uta.fi/doi/pdf/10.1207/S15327809JLS1101_4?needAccess=true (Luettu 26.2.2018)

Flegg, G. 2002. Lukujen historia – Sormilla laskemisesta tietokoneisiin. WS Bookwell. 184, 216, 217, 224

French, D. 2003. “Problems in Learning School Algebra” notes and handouts from seminar at SHU March 22

Haapasalo, L. 2004. Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.)Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki-instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä. 50–83

Haapasalo, L. 1998. Ongelmanratkaisun oppimisesta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki-instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä. 80–89

Haapasalo, L. 1998. Konstruktivistisen pedagogiikan problematiikasta. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki-instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä. 52–79

Haapasalo, L. 1993. Desimaalilukujen ja yksikönmuunnosten konstruktivistinen oppiminen. Jyväskylän yliopisto. 6–8

Haapasalo, L. 1993. Matematiikan opetussuunnitelmien lähtökohtia ja kehittämisnäkymiä. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. 38

Hannula, M., Kupari P, ja Räsänen P. 1998. Matematiikka ja sukupuoli. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki-instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä. 1998. 189–215

Happonen, J. Heinonen, M., Muilu, H. ja Nyrhinen, K. 2005. Konstruktivismi modernin tieto- ja oppimiskäsityksen perustana. Teoksessa Avain Fysiikka 2. Opettajan aineisto. Otavan Kirjapaino Oy. Keuruu 2006. 133

Hautamäki, J. & Kuusela, J. 1998. Matemaattiset oppimisvaikeudet – Diagnostisen päättelemisen pulmista ja keinoista. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki-instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä. 142–162

Heinonen, J.-P. 2005. Opetussuunnitelmat vai oppimateriaalit. Peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa. Tutkimuksia 257. Dark Oy Helsinki. 29–31, 32, 39

Huinker, D. 2002. Examining Dimensions on Fraction Operation Sense. Teoksessa B. Litwiller & G. Bright. Making Sense of Fractions, Rations, and Proportions. National Council of Teacher of Mathematics Reston. Virginia. 72–78

Hytti, P. & Joutsenlahti, J. 2006. Matematiikan oppimateriaalin tutkimus ja kehittäminen osana opettajankoulutusta: MOT-hanke ja ”storytelling”-kokeilu. Teoksessa (toim.) A.-L. Aalto & T. Tammi. Tutkimusta, toimintaa ja tulevaisuuden näkymiä koulutyössä. Tampereen yliopisto.3–15

Ikäheimo, H. & Voutilainen, E. 2009. Murtolukuja välineillä luokille 3–9. WSOY 4

Ilves, M. 2005. Ääneenajattelu. Teoksessa S. Ovaska, A. Aula, & P. Majaranta (toim.) Käytettävyystutkimuksen menetelmät. Tampere: Tampereen yliopisto, Tietojenkäsittelytieteiden laitos, 209-222. http://www.cs.uta.fi/usabsem/luvut/14-Ilves.pdf (Luettu 14.10.2017)

Joutsenlahti J. 2009. Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä. Teoksessa R. Kaasila, (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Rovaniemi 73–77

Joutsenlahti, J. 2003a. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa A.Virta & O. Marttila (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium 7.2.2003. Turun yliopisto: Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja B:72, 188–196

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2017. Multimodal Languaging as a Pedagogical Model—A Case Study of the Concept of Division in School Mathematics. Education Sciences. MPDI. https://search-proquest-com.helios.uta.fi/docview/1889040029?pq-origsite=summon (Luettu 14.10.2017)

Joutsenlahti, J. & Räyttyä, K. 2015. Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.) Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13. -14.2.2014. Jyväskylä. 45–62

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K., 2011. Matematiikan kielentämisen tutkimuksen lähtökohtia kielen näkökulmasta Sanan lasku -projektissa, Tutkimus suuntaamassa 2010-luvun matemaattisten aineiden opetusta. Teoksessa H. Silfverberg (toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät Tampereella 14.–15.10.2010. Tampere: Tampereen yliopisto, kasvatustieteiden yksikkö. 173

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2010. Matematiikan sekä äidinkielen ja kirjallisuuden opetuksen kehittäminen yhteisen tutkimuksen avulla: Sanan lasku –projekti. Teoksessa T. Laine & T. Tammi (toim.) Tutki, kehitä, kokeile. Tampereen yliopisto. 53–59

Kangasniemi, T. 2009. Murtolukujen ei pitäisi olla vaikeita: aivoissa on niihin erikoistuneita soluja. Tekniikka&Talous 22.4.2009, 11.07. http://www.tekniikkatalous.fi/innovaatiot/2009-04-22/Murtolukujen-ei-pit%C3%A4isi-olla-vaikeita-aivoissa-on-niihin-erikoistuneita-soluja-3271978.html (Luettu 17.8.2017)

Kauppila, R.A. 2007. Ihmisen tapa oppia. Johdatus sosiokonstruktiiviseen oppimiskäsitykseen. Opetus 2000. PS-Kustannus. 37–38, 43–44

Kornegay, C. 1999. Math Dictionary With Solutions : A Math Review. http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&db=nlabk&AN=478005 (Luettu 11.12.2017)

Kulju, P. & Joutsenlahti, J. 2010. Mitä annettavaa äidinkielellä ja matematiikalla oppiaineina voisi olla toisilleen? Teoksessa E. Ropo & H. Silfverberg & T. Soini (toim.) Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009. Tampereen yliopisto Oy – Juvenes Print.163–178

Leino, J. 1998. Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki-instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä. 39–51

[Morgan, C. The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. In Issues in Mathematics Teaching; Gates, P., Ed.; Routledge: London, UK, 2001; pp. 232–244.]

Metsämuuronen, J. 2008. Laadullisen tutkimuksen perusteet. Metodologia –sarja 4. HAMK. 43, 47–48

Oinas-Kukkonen, H., Merikoski, J. ja Niva, R. Akseli 1. Matematiikan laaja oppimäärä. Weilin+Göös. 11

Opetussuunnitelman Perusteet 2004

Opetussuunnitelman perusteet 2014. Opetushallitus. Next Print Oy, Helsinki 2016.

Pimm, D.1987. Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms. London : Routledge & Kegan Paul. 77

Pinola, M. Viesti ilman hymiöitä on luonnollista tulkita loukkaukseksi – mutta tutkijoilla on kehitteillä ratkaisu tähänkin. https://yle.fi/uutiset/3-9862610 (Luettu 3.11.2017)

Raatikainen, P. 2005. "Ihmistieteet - tiedettä vai tulkintaa?" Teoksessa Meurman-Solin & Pyysiäinen (toim.) Ihmistieteet tänään. Gaudeamus. 2005. Verkossa osoitteessa: Verkossa osoitteessa: https://www.academia.edu/19023885/Ihmistieteet_-_tiedett%C3%A4_vai_tulkintaa. (Luettu 18.11.2017)

Rainer, T. (toim.) 1980-luvulla. ”Cheshbon pashut” חשבון פשוט (=Yksinkertaista matematiikka).”Ha merkaz le-televizia ha-limudit. Misrad ha-chinuch veha-tarbut” . המרכז לטלוויזיה לימודית

Repo, S. 1998. Matemaattisen käsitteen konstruoiminen symbolilaskennan ohjelman avulla. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki-instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä. 316–335

Rom, E. ja Pearlstein, R. 2013. ערכי מערכת החינוך בישראל. Teoksessa חינוך לערכים בעולם משתנה אסופת ניירות דעה http://education.academy.ac.il/Uploads/BackgroundMaterials/Hebrew/Values-Education-21st-century.pdf (Luettu 2.10.2016)

Steencken, E. & Maher, C.A. 2002. Young Children's Growing Understanding of Fraction Ideas. Teoksessa B. Litwiller & G. Bright. Making Sense of Fractions, Rations, and Proportions. National Council of Teacher of Mathematics Reston. Virginia. 49–60

Stewert, I. 2007. Kirjeitä nuorelle matemaatikolle. Hakapaino. Helsinki. 173–175

Swan, M.Dealing with misconceptions in mathematics. 2001. Teoksessa P. Gates Issues in mathematics teaching. Routledge: London, UK. 147–166

Tall, D. 2016. From Where We Stand : Recovering a Sense of Place. Syracuse, New York: Syracuse University Press.

Tall, D. & Vinner, S. 1981. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151–169, (1981).

Tuomi, J. 2007. Tutki ja lue. JOhdatus tieteellisen tekstin ymmärtämiseen. Kustannusosakeyhtiö Tammi. Helsinki. 95–96, 153–154

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2003. Ladullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Kustannusosakeyhtiö Tammi. Helsinki. 140–142

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2009. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Tammi. Jyväskylä. 40–41

Thompson, J. (toim.) 1993. Matematiikan sanakirja. Kustannusosakeyhtiö Tammi. Helsinki. 260

Tynjälä, P. 1999. Oppiminen tiedon rakentamisena. Konstruktiivisen oppimiskäsityksen perusteita. Kirjayhtymä Oy. Tammer-Paino Oy. 60, 148–168

Uudenkaupungin perusopetuksen opetussuunnitelma vuosiluokille 1–9. Opetussuunnitelman lukuohje. https://erperusteet.opintopolku.fi/#/fi/ops/7295264/perusopetus/tekstikappale/7977223 (Luettu 15.10.2017)

Vainionpää, Jorma 2006. Erilaiset oppijat ja oppimateriaalit verkko-opiskelussa

http://urn.fi/urn:isbn:951-44-6553-9 (Luettu 1.11.2017)

Yrjönsuuri, R. 2004. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.)Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki-instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä. 111–137

Yrjönsuuri, R. 1998. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki-instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä. 128–141

Liitteet:

1. **Murtoluvut ja kielentäminen, Alkukysely**
2. **Murtoluvut ja kielentäminen, Loppukysely**
3. **Pieni kertaus (testi)**
4. **Murtoluvut ja kielentäminen, tuntipalautekaavake**

Liite 1(4)

Murtoluvut ja kielentäminen Alkukysely Nimikirjaimet ______

Mukavaa, että olet mukana!

Tämän kyselyn avulla pyrin saamaan tietoa siitä, millaisia mielikuvia sinulla on murtolukulaskuista ja miten koet kielentävien murtolukutehtävien toimivan. Vastaa niin hyvin kuin pystyt. Vastauksesi eivät vaikuta matematiikan arvosanaasi, vaan niillä kerään tietoa siitä, miten murtolukutehtäväpaketti toimii.
Neljän murtolukutunnin jälkeen saat vastaavan kyselyn.

Nimikirjainten merkitys on tärkeä, jotta voin lopussa yhdistää alkukyselyn ja loppukyselyn toisiinsa.

Kiitos, että teet kyselyn huolellisesti!

Hanna-Kaisa Nikunen

Mielipiteesi murtolukulaskuista

(Rastita hymiö, joka kuvaa parhaiten ajatuksiasi.)

Mielestäni murtoluvut ja murtolukulaskut ovat

Hallitsen täysin sen, mitä murtoluvuista on opetettu viidennellä luokalla.

Murtolukujen osaaminen on tärkeää.

Haluan oppia murtoluvuista enemmän.

Ymmärrän täysin, mitä murtoluvuilla tarkoitetaan.

Murtoluvut ovat mielestäni käytännöllisiä.

Murtolukulaskuissa minua on jäänyt mietityttämään ____________________________________

____

Elämä ilman murtolukuja olisi ____

____

Osallistun tutkimukseen mielelläni.

Pidän murtoluvuista ja niillä laskemisesta.

Murtoluvut ja kielentäminen Loppukysely Nimikirjaimet ___ ___

Tosi mukavaa, että olit mukana!

Olen saanut jo hyviä ideoita ja erinomaisia vinkkejä, miten muutan tehtäviä tai teoriaosaa tehtäväpaketissa. Osallistumisesi on ollut tärkeää!

Kiitos, että teet vielä tämän kyselyn huolellisesti!

Hanna-Kaisa Nikunen

Mielipiteesi murtolukulaskuista

<u>(Rastita</u> hymiö, joka kuvaa parhaiten ajatuksiasi.)

Mielestäni murtoluvut ja murtolukulaskut ovat

Hallitsen täysin sen, mitä murtoluvuista on opetettu viidennellä luokalla.

Ymmärrän täysin, mitä murtoluvuilla tarkoitetaan.

Murtoluvut ovat mielestäni käytännöllisiä.

Mielipiteesi neljän tunnin aikana tehdyistä murtolukutehtävistä:

Uusi tehtäväpaketti toimii.

Tehtävissä oleva kirjoitetun tekstin määrä.

Vanha oppikirjamalli toimii mielestäni paremmin.

Kuvat olivat kivoja.

Vuoropuhelut oppilaiden ja opettajan välillä.

Se, että teoriaa ja tehtäviä on ”sekaisin”.

Tällainen matematiikan opiskelu on ____

____

Uudet murtolukutehtävät toimisivat paremmin, jos ____________________________________

____

Liite 3(4)

Ja pieni kertaus:

Vastauksissasi voit kirjoittaa numeroita ja sanoja. Voit myös piirtää. Yritä selittää niin tarkasti kuin mahdollista, mitä olet ajatellut.

1) $\frac{2}{3}$ tarkoittaa:

2) $\frac{4}{5}$ on suurempi kuin $\frac{2}{3}$. Miten sen perustelet?

3) Muuta sekaluvuksi $\frac{14}{9}$.

4) Muuta murtoluvuksi $3\frac{1}{5}$.

5) Kuinka lavennat murtoluvun $2\frac{2}{7}$ neljästoistaosiksi?

6) Kirjoita lasku $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ sanoin.

7) Selitä osoittaja:

8) Tutki lukuja: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{12}$

a) Millä tavalla luvut eroavat toisistaan?

b) Mitä yhteistä luvuilla on?

9) Kaksi ryhmää harjoitteli murtolukuja. Toinen ryhmä otti kokonaisesta täytekakusta $\frac{1}{4}$ pois kun taas toinen ryhmä otti kokonaisesta munkkirinkilästä $\frac{1}{4}$ pois. Molemmille jäi jäljelle $\frac{3}{4}$. Miten tämä on mahdollista, vaikka täytekakku on paljon suurempi kuin munkkirinkilä?

(vain Loppukyselyssä)
10. Tällaiset tehtävät toimisivat parhaiten:

Liite 4(4)

Murtoluvut ja kielentäminen I tunnin jälkeen Nimikirjaimet ______

Jokaisen tunnin jälkeen annat lyhyen palautteen.

Millaisia tehtävät olivat mielestäsi? Vaikeita  Helppoja

Tehtävät olivat tylsiä.  Tehtävät olivat mielekkäitä.

Mikä osa oli mielestäsi parhaiten onnistunut? Miksi? (Kirjoita)

____

____

Mikä tehtävä ei mielestäsi ollut hyvä? Miksi?

____

____

Murtolukujen perusteita...

Neljän oppitunnin kokonaisuudessa käsitellään murtolukua ja sen hahmottamista perusteista alkaen. Oppimateriaalin sisällössä huomioidaan **kuvakieli, matematiikan kieli ja luonnollinen kieli**.

Tehtävät voivat aluksi tuntua hyvin helpoilta ja vanhan kertaukselta. Vanhoilla tiedoilla saatat pärjätä, mutta pelkkä tekninen laskujen ratkaiseminen ei riitä. Opettelemme perustelemaan ja ymmärtämään sitä, mitä teemme. Oikeita ratkaisuja ja pohdintoja voi olla useita.

Oivaltaminen ja ymmärtäminen on tärkeää.

Saat jokaisella matematiikan tunnilla uuden teoria-tehtävänipun. Jakson päättyessä sinulla on mukava materiaali muistona murtolukujen sanallistamisesta ja matematiikan kolmen "kielen" yhdistämisestä.

Teksti ja tehtävät: Hanna-Kaisa Nikunen
Kuvat: Tuuli Kemppi

Huomaa!

Tehtäväsivuilla ei ole valmiita ruudukoita tai muita laskutapaa ohjaavia tiloja. Voit käyttää vapaasti kaikki tyhjät osat monisteessa. Hyödynnä tyhjiä alueita muistiinpanoille, piirroksille ja hahmotelmille. Nyt saa tehdä merkintöjä!

Vapaasti käytettävissä
© Hanna-Kaisa Nikunen

Hanna-Kaisa Nikunen
Pro gradu opinnäytetyö 2017
luokanopettajaopinnot
Tampereen yliopisto

<u>Tunti 1</u> **1/I**

Harjoitus 1

Leikkaa monistenipun lopusta KUVIO 1, joka on neliö.
Jaa neliö taittelemalla kahteen yhtä suureen osaan. Jaa sen jälkeen vielä kahteen osaan, siis neliö jaetaan neljään yhtä suureen osaan.
Kuinka monella eri tavalla jako voidaan tehdä?
Millaisia ratkaisuja keksit? Yritä selittää kirjoittamalla.

____

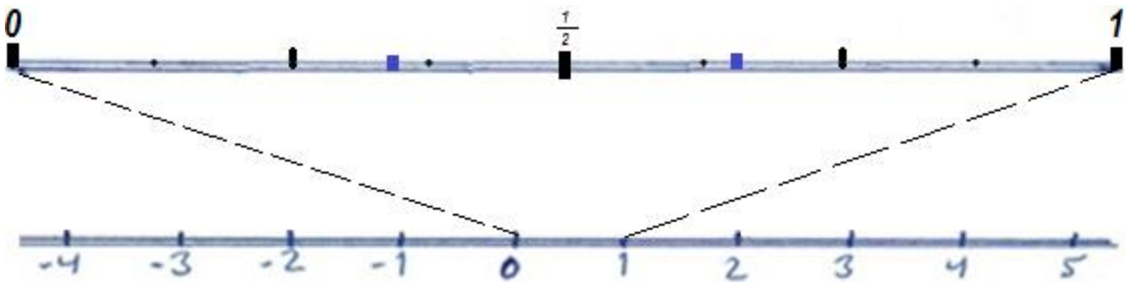
____

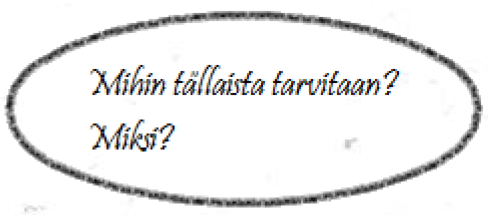
____

Päästään kiinni murtolukuun.
Harvemmin juodaan kokonaista maitotölkillistä kerralla.
Tarvitaan kokonaista pienempiä lukuja.
Lukujen 0 ja 1väliin mahtuu useita lukuja.

Harjoitus 2

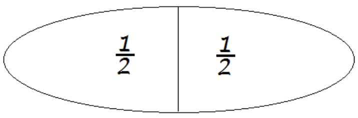
Lukusuoralle on jo laitettu luku $\frac{1}{2}$. Mitä lukuja itse osaat vielä lisätä?





Joskus kakku on liian iso yksin syötäväksi... silloin kakkua pitää pystyä jakamaan useampaan osaan.

Mummo tuskin käyttää ilmaisua *nolla pilkku viisi* (0,5) tai *yksi kahdesosa* ($\frac{1}{2}$) tarkoittaessaan puolikasta kakkua.



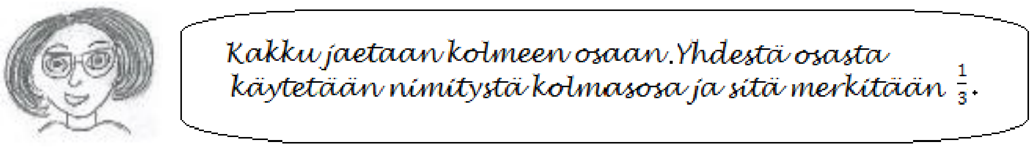
"Puolikas plus puolikas on yksi kokonainen."

Puolikas on puolet kokonaisesta.

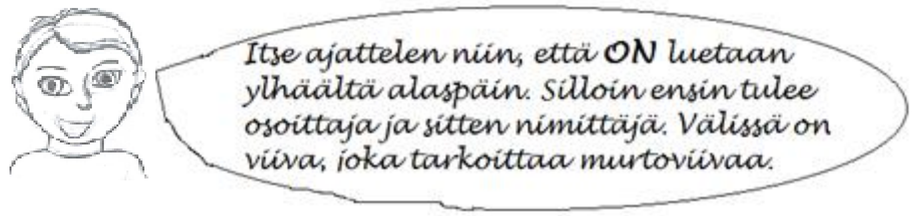
Harjoitus 3

Miten eri tavoin voisit kirjoittaa puolikkaan murtoluvuilla?

$$\frac{1}{2} = \boxed{\frac{}{4}} = \frac{}{8} = \frac{}{10} = \frac{}{12} = \frac{}{20} = \_\_\_ = \frac{}{100} = \_\_\_ = \frac{}{140} = \_\_\_$$



Merkinnässä ylempi numero 1 (yksi) on nimeltään *osoittaja* ja alempi numero 3 (kolme) on *nimittäjä*. Alempi luku kertoo, kuinka moneen osaan kokonainen on jaettu ja ylempi luku kertoo, kuinka monta osaa niistä on valittu. Välissä olevaa viivaa kutsutaan *murtoviivaksi*. Myöhemmin samaa viivaa käytetään *jakolaskun yhteydessä jakoviivana*.



Harjoitus 4

Piirrä kakku harppia tai ympyrämuottia apuna käyttäen. Jaa kakku neljään yhtä suureen osaan. Väritä kolme osaa vihreällä. Miten ilmoittaisit värittämäsi alueen matematiikan kielellä?

Kirjoitan:

Harjoitus 5

Kirjoita seuraavat murtoluvut luonnollisella kielellä, eli siten <u>kuin ne sanotaan</u>.

$\frac{3}{5}$ ______________________________

$\frac{7}{11}$ ______________________________

$\frac{19}{23}$ ______________________________

Ja toisinpäin:

Yksi kuudesosa Kaksitoista viidestoistaosaa

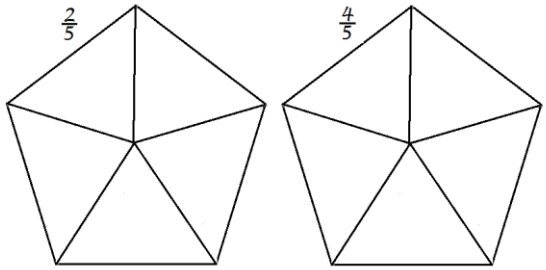
Viisi seitsemäsosaa Kaksikymmentä seitsemän neljäskymmenesviidesosaa

Puhekielen ilmaisu kolmasosa merkitään matemaattisesti $\frac{1}{3}$, vaikka tarkemmin tämä ilmaistaan "yksi kolmasosa".

Harjoitus 6

Murtolukujen avulla voi helposti verrata lukujen kokoa. Esimerkiksi **samannimisten lukujen** $\frac{2}{5}$ ja $\frac{4}{5}$ ero päätellään osoittajasta.

Väritä kuvioista murtoluvut.

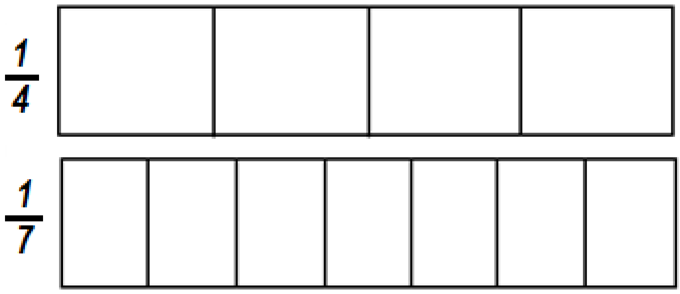


Tässä tapauksessa:

mitä ___________________ osoittaja sitä __________________ luku on.
(suurempi/pienempi) (suurempi/pienempi)

Harjoitus 7

Jos **osoittajien luku on sama**, lukujen ero päätellään nimittäjästä.
Verrataan lukuja $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{7}$.
Väritä kuvioista murtoluvut.



Mitä __________________ nimittäjä sitä _________________________ luku on.

Harjoitus 8

Leikkaa mainoslehdestä ympyrä. Taittele ympyrä osiin niin, että osat ovat samankokoiset.
(Tässä ei tarvita edes harppia. Voi piirtää ympyrät, vaikka lautasella ja taittamalla löytyy keskipiste.)

Miten jaoit / taittelit ympyrän? Kuinka moneen osaan sait jaettua? Onnistuitko taittamaan kolmeen tai viiteen osaan? Miten teit sen? (Kirjoita!)

____

____

____

____

Harjoitus 9 **5/I**

Keksi esimerkki siitä, miten murtoluvut näkyvät arkipäivän elämässä.
(Esimerkki ei ole vain yksi sana! Kirjoita kokonaisilla lauseilla.)

____

____

____

____

____

Harjoitus 10

a) Ilmoita murtolukuna:

15 min = ___ h 30 min = ___ h 80 min = ___ h

b) ja desimaalilukuna:

15 min = ___ h 30 min = ___ h 80 min = ___ h

c) Ilmoita minuutteina:

$\frac{1}{6}$ h = ____ min $\frac{5}{6}$ h = ____ min $\frac{1}{5}$ h = ____ min

Harjoitus 11

a) Merkitse **= , > tai <**

$\frac{1}{7} \square \frac{3}{21}$ $\frac{3}{4} \square \frac{2}{3}$ $\frac{1}{9} \square \frac{4}{32}$ $\frac{1}{9} \square \frac{5}{36}$

$b)$ $\frac{3}{4}$ on (> , = , <) kuin $\frac{2}{3}$, koska ______________________________
(ympyröi oikea merkki)

____

$c)$ $\frac{4}{32}$ on (> , = , <) kuin $\frac{1}{9}$, koska ______________________________
(ympyröi oikea merkki)

____

Harjoitus 12 **6/I**

Keksi esimerkkejä, joissa käytät lukua $\frac{3}{4}$.

Voit piirtää ja kuvittaa. Voit käyttää apuna vuoropuhelua, sarjakuvaa, matemaattista perustelua.

Harjoitus 13

Osaat varmasti kirjoittaa murtolukuna yksi kahdesosa ($\frac{1}{2}$, ”puolikas”).

Onko mahdollista merkitä puolikas kolmasosina? $\frac{\quad}{3}$

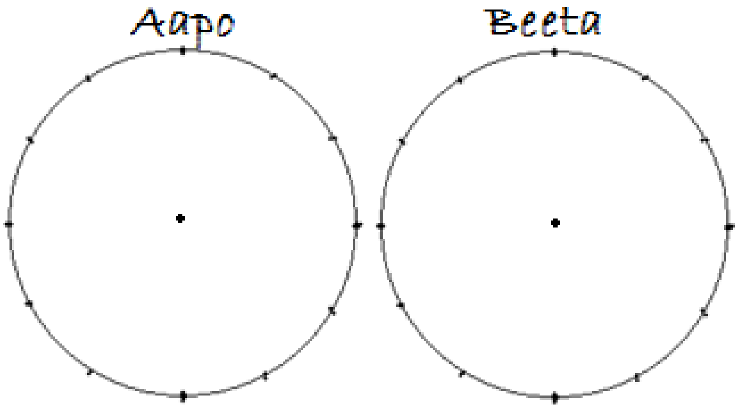
Miten sanoisit luvun?____

Mitä outoa luvussa on? Mitä ajattelet siitä? ____________________________________

____

Tunti 2 1/II

Onko muita tapoja ilmaista $\frac{2}{3}$?



Harjoitus 1
a) Jaa Aapo ja Beeta kolmeen yhtä suureen osaan.
b) Jaa Aapon osat vielä kahteen yhtä suureen osaan.
c) Väritä Aaposta ja Beetasta kaksi kolmasosaa haluamallasi värillä.

d) Molemmat voidaan ilmaista murtolukuna

f) Aapo voidaan ilmaista myös murtoluvulla

g) Jos ensin on Aapo ja sitten Beeta. Mitä Beetan osoittajalle ja nimittäjälle tapahtui?

____

____

h) Tätä kutsutaan matematiikan sanoin ____________________________.

Samankokoista lukua voidaan ilmaista erilaisilla murtoluvuilla. Tavallisesti murtoluvut pyritään ilmaisemaan supistetussa muodossa.

*Murtolukujen kohdalla tästä käytetään nimitystä **supistaminen**. Supistamisessa käytettävä supistaja merkitään supistettavan murtoluvun oikeaan yläkulmaan seuraavasti:*

$$\frac{4^{|2}}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}$$

Ymmärrän. Sekä osoittaja että nimittäjä jaetaan supistajalla.

Sama supistaminen voidaan tehdä myös käyttäen muuta supistajaa kuin lukua 2.

Esimerkiksi: $\frac{7^{|7}}{21} = \frac{7:7}{21:7} = \frac{1}{3}$

Miksi tällaista tehdään?? **2/II**

Matematiikassa on tapana ilmaista murtoluku yksinkertaisimmassa muodossa. Toisin sanoen sekä osoittaja että nimittäjä ovat mahdollisimman pieniä kokonaislukuja.

$\frac{6^{\backslash 3}}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$ *Luetaan: Kuusi yhdeksäsosaa supistettuna kolmella on yhtä suuri kuin kaksi kolmasosaa.*

Hyvin usein puhekielessä ”on yhtä suuri kuin” korvataan sanalla ”on”!

Supistamisessa kannattaa miettiä, minkä luvun kertotaulusta sekä osoittaja että nimittäjä löytyvät. Esimerkissä luvut kuusi (6) ja yhdeksän (9) löytyvät kolmen (3) kertotaulusta. Usein näissä laskuissa jätetään jakolaskun välivaihe merkitsemättä, kuten seuraavassa havaitset.

$\frac{8^{\backslash 2}}{14} = \frac{4}{7}$ *Luen: Kahdeksan neljästoistaosaa supistettuna kahdella on neljä seitsemäsosaa.*

Supistamisen voi tehdä myös vaiheittain - monta kertaa peräkkäin.
Kokeillaan esimerkiksi: $\frac{24^{\backslash 2}}{36} = \frac{12^{\backslash 3}}{18} = \frac{4^{\backslash 2}}{6} = \frac{2}{3}$

Saman supistuslaskun olisi voinut tehdä käyttäen suoraan supistajaa 12!

Hienosti päättelit!

Harjoitus 2

Supista murtoluku. (Merkitse välivaihe näkyviin.)

$\frac{15^{\backslash 5}}{25} = \frac{}{}$

Kirjoita lasku sanoin:

___

___

___

Harjoitus 3 **3/II**

Nyt saat miettiä myös supistajan itse. Voit jättää välimuodon halutessasi pois.

a) $\frac{12}{16} = \frac{\square}{\square}$ b) $\frac{18}{24} = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{22}{28} = \frac{\square}{\square}$ d) $\frac{36}{48} = \frac{\square}{\square}$

e) $\frac{21}{35} = \frac{\square}{\square}$ f) $\frac{24}{64} = \frac{\square}{\square}$

Harjoitus 4

Laita luvut suuruusjärjestykseen. Tee jokaisesta murtoluvusta oma lasku.
Käytä tyhjää tilaa avuksi laskemisessa ja vastauksen antamisessa.

$\frac{3}{9}, \frac{8}{12}, \frac{6}{24}, \frac{25}{45}, \frac{27}{45}, \frac{24}{32}, \frac{18}{30}$

Harjoitus 5 **4/II**

Laita seuraavat luvut suuruusjärjestykseen:
(Vinkki! Käytä tyhjää tilaa avuksi laskemisessa ja vastauksen antamisessa.)

25% | $\frac{3}{100}$ | 0,2 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | 0,6 | 50% | $\frac{5}{6}$

Harjoitus 6

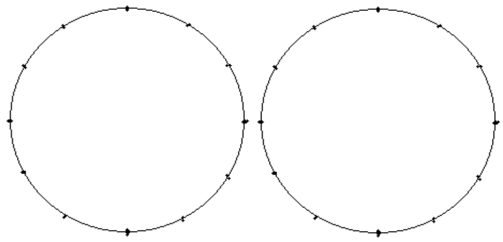
Serkukset Minna ja Maisa tapasivat kesälomalla mummolassa. Minna kertoi, että heidän luokallaan oli 35 oppilasta. Tyttöjen osuus oli 21. Maisa kävi pientä kyläkoulua ja heidän luokallaan oli 15 oppilasta, joista 10 oli tyttöjä.
Kumman luokalla on suhteessa enemmän tyttöjä?
Selitä kirjoittamalla, miten ratkaisit. Voit myös piirtää.

Tunti 3 **1/III**

On tapauksia, jolloin nimittäjäksi tarvitaan suurempi luku kuin valmis luku on. Tällaista murtoluvun suurentamista kutsutaan **laventamiseksi**. Laventamista käytetään muun muassa silloin, kun eri murtolukuja verrataan toisiinsa.

Harjoitus 1

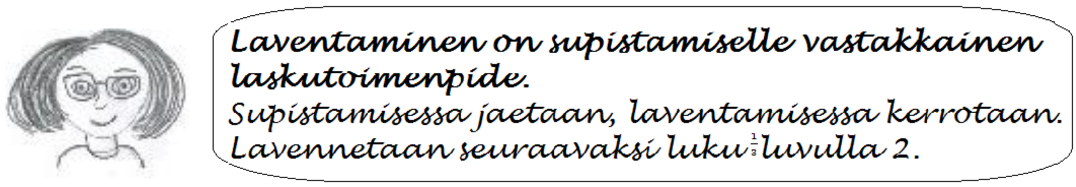
a) Leikkaa Tunti 1 -monisteen takasivulta kaksi ympyrää.
b) Etsi ympyröistä keskipisteet ja
c) jaa ne osiin siten, että toinen jaetaan kolmeen yhtä suureen osaan ja toinen neljään yhtä suureen osaan.
d) Leikkaa molemmista ympyröistä yksi osa. Sinulla on nyt yksi kolmasosa $\frac{1}{3}$ ja yksi neljäsosa $\frac{1}{4}$.

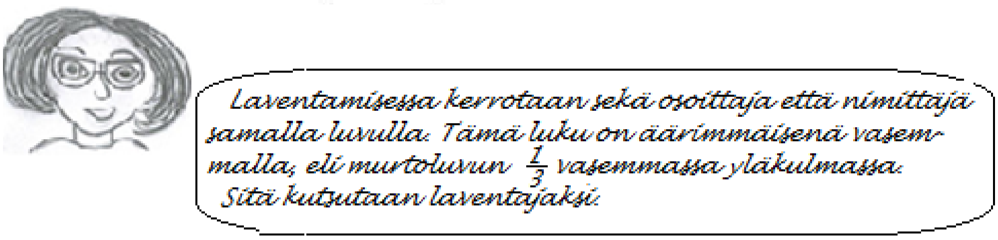


e) Kumpi osista on suurempi? ____

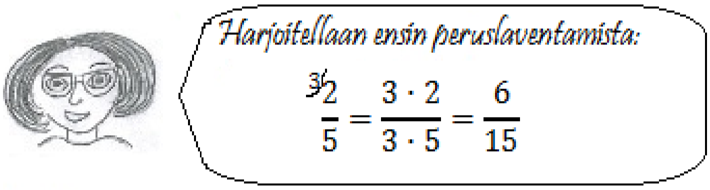
f) Perustele: ____

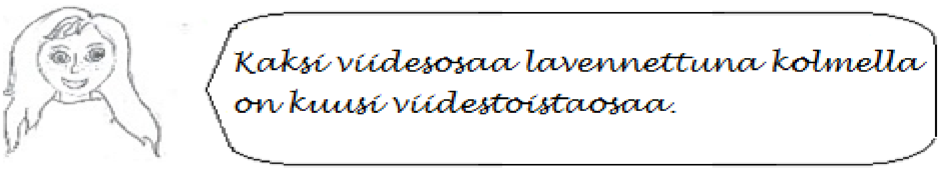
Eikö matematiikassa pidä olla näppärämpi tapa vertailla lukuja keskenään kuin leikka-liimaa-systeemillä?
→ Tähän tarvitaan laventamista.(Ja, tietenkin jossain tilanteissa myös supistamista.)
Kuinka matemaattisesti osoitetaan, että $\frac{1}{3}$ on suurempi kuin $\frac{1}{4}$?





$$^{2)}\frac{1}{3}=\frac{2\cdot1}{2\cdot3}=\frac{2}{6}$$





Harjoitus 2 **2/III**

$$^{4/}\frac{8}{9} = \frac{4 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \frac{32}{36}$$

Sanotaan: <u>*Kahdeksan yhdeksäsosaa lavennettuna neljällä on kolmekymmentäkaksi kolmaskymmeneskuudesosaa.*</u>

$$^{7/}\frac{5}{6} =$$

Sanotaan: ____

____

Harjoitus 3

Myös laventamisessa voidaan jättää välimuoto pois. Kirjoita silloin vain lavennettu muoto.

$^{8/}\frac{3}{4} =$ $\qquad$ $^{6/}\frac{3}{7} =$

$^{9/}\frac{5}{8} =$ $\qquad$ $^{7/}\frac{7}{11} =$

Jotta voisimme vertailla murtolukuja keskenään, meidän pitää löytää yhteinen nimittäjä molemmille murtoluvuille. Toisin sanoen tarvitaan yhteinen nimittäjä, joiksi molemmat murtoluvut voidaan laventaa. Verrataan lukujen 3 ja 4 kertotauluja keskenään.

Luvun 3 kertotaulu							
1 · 3	2 · 3	3 · 3	4 · 3	5 · 3	6 · 3	7 · 3	8 · 3
3	6	9	12	15	18	21	24

Luvun 4 kertotaulu					
1 · 4	2 · 4	3 · 4	4 · 4	5 · 4	6 · 4
4	8	12	16	20	24

Ensimmäinen yhteinen luku on 12. On myös mahdollista käyttää lukua 24, mutta se ei ole niin käytännöllistä.

$4 \cdot 3 = 12$, niin $\frac{1}{3}$ lavennetaan neljällä (4) ja $3 \cdot 4 = 12$, niin $\frac{1}{4}$ lavennetaan kolmella (3).

$$^{4/}\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{4}{12} \qquad ^{3/}\frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12}$$

Koska nyt molemmat luvut ovat kahdestoistaosia, niin $\frac{4}{12} > \frac{3}{12}$.

Siis $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. *Yksi kolmasosa on suurempi kuin yksi neljäsosa.*

Edellisessä esimerkissä käytettiin ***"ristiinlaventamista".*** Toisin sanoen lavennettiin toinen murtoluku toisen murtoluvun nimittäjällä ja toisinpäin.

Harjoitus 4 **3/III**

Etsi seuraaville pareille yhteinen nimittäjä. Pyri löytämään mahdollisimman pieni sellainen.

a) $\frac{1}{2}$ ja $\frac{5}{6}$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad \frac{5}{6} = \frac{\quad}{\quad}$

Yhteinen nimittäjä on _____.

b) $\frac{2}{5}$ ja $\frac{1}{6}$ $\quad \frac{2}{5} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad \frac{1}{6} = \frac{\quad}{\quad}$

Yhteinen nimittäjä on _____.

c) $\frac{1}{4}$ ja $\frac{5}{6}$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad \frac{5}{6} = \frac{\quad}{\quad}$

Yhteinen nimittäjä on _____.

Harjoitus 5

Entä jos murtolukuja on 3?

a) $\frac{1}{2}$ ja $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad \frac{2}{3} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad \frac{3}{4} = \frac{\quad}{\quad}$

Yhteinen nimittäjä on _____.

b) $\frac{1}{8}$ ja $\frac{3}{6}$ ja $\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{8} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad \frac{3}{6} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{\quad}{\quad}$

Yhteinen nimittäjä on _____.

c) $\frac{3}{5}$ ja $\frac{4}{6}$ ja $\frac{7}{8}$ $\quad \frac{3}{5} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad \frac{4}{6} = \frac{\quad}{\quad}$ $\quad \frac{7}{8} = \frac{\quad}{\quad}$

Yhteinen nimittäjä on _____.

Harjoitus 6

Keksi ja kirjoita ohje, miten löydät helposti yhteisen nimittäjän.

____

____

____

Harjoitus 7 4/III

Käytä lukuja $\frac{3}{4}$ ja $\frac{5}{6}$. Kokeile kahta yhteistä nimittäjää, joista toinen ei ole pienin mahdollinen yhteinen nimittäjä. Mitä huomaat? Mitä etua on siitä, että käyttäisit pienintä yhteistä nimittäjää?

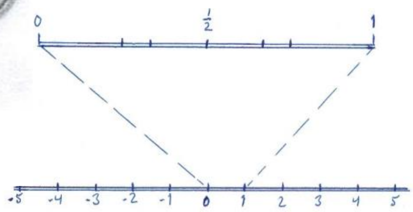
Harjoitus 8

Etsi kolme murtolukua lukujen $\frac{1}{5}$ ja $\frac{1}{4}$ välistä. Voit myös piirtää, jos se helpottaa hahmottamista.

Harjoitus 9

Isosta maitopurkista isä juo $\frac{1}{3}$, äiti $\frac{1}{4}$ ja Jesse $\frac{1}{6}$. Kuinka paljon maitoa jäi Mauno-kissalle?

4 tunti **1/IV**



Harjoitus 1

Kuinka monta $\frac{1}{3}$ pitää ottaa, että saadaan kokonainen kakku? ____ osaa.
(Ryhmätyö, jossa käytetään valmiita kolmasosia. Opettaja jakaa oppilaille (n.3-4 hlö/ryhmä).

Jos osia olisi **7**:
Kuinka monta kokonaista saadaan koottua? ___ Kuinka monta osaa jää yli? ____

Voitaisiinko koko luku ilmoittaa kolmasosina?

Kyllä voidaan. Se olisi $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

*Jos osia olisi **11**?*
Kuinka monta kokonaista saadaan koottua? ___ Kuinka monta osaa jää yli?____

Täydennä myös: $\frac{11}{3} = \quad -$

$\frac{11}{3}$ on *murtoluku* ja $3\frac{2}{3}$ on nimeltään *sekaluku*.
Laskutoimitusta kutsutaan ***murtoluvun muuttamista sekaluvuksi***.

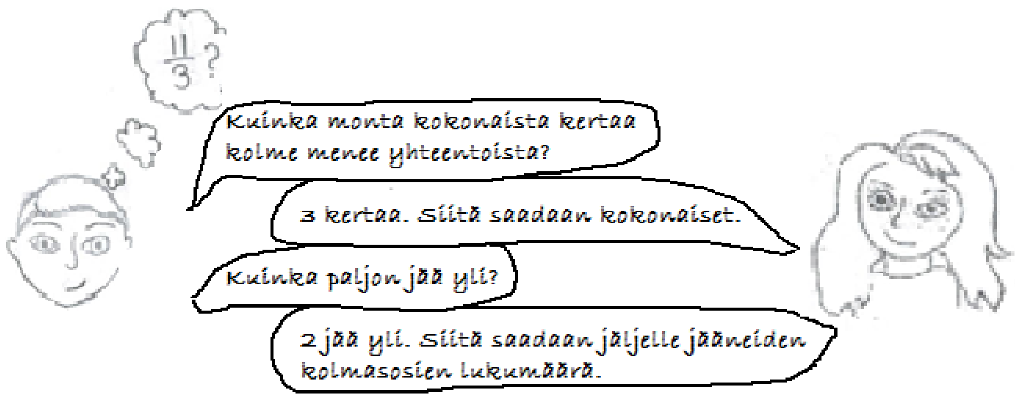
Matematiikassa käytetään sekä murtoluku- että sekalukumerkintää.
Vastaus ilmoitetaan tavallisesti sekalukuna.

Harjoitus 2

Mitä kannattaa huomioida, kun muuntaa murtolukua sekaluvuksi? ___________________________

____

____

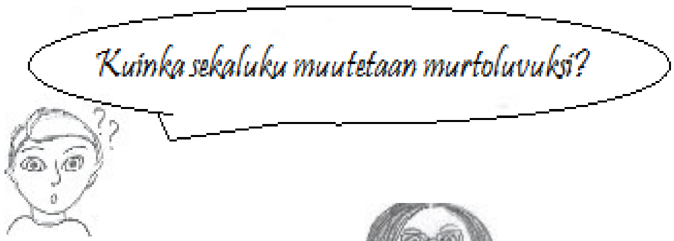


Harjoitus 3

Muuta murtoluvut sekaluvuiksi.

$\frac{15}{3} =$ $\qquad \frac{28}{4} =$ $\qquad \frac{42}{7} =$ $\qquad \frac{17}{4} =$

$\frac{32}{5} =$ $\qquad \frac{43}{6} =$ $\qquad \frac{79}{9} =$ $\qquad \frac{103}{11} =$



Otetaanpa esimerkiksi: $2\frac{3}{4}$

Harjoitus 4

Kuinka monta neljäsosaa on 2 kokonaista? Vastaa sinä: $\boxed{\frac{}{4}}$

Ja lisäksi on vielä $\frac{3}{4}$.

Yhteensä osia on… Vastaa sinä: $\boxed{\frac{}{4}}$

Siis: $2\frac{3}{4} = \boxed{\frac{}{4}}$

Käytännössä kannattaa kertoa kokonaiset (2 kappaletta) 4:llä (neljäsosia) ja lisätä vielä jäljelle jääneet neljäsosat (3 kappaletta).

$$2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

$2\frac{3}{4}$ + x

Kaksi kokonaista kerrotaan neljällä ja sitten lisätään kolme.

Harjoitus 5 **3/IV**

Kirjoita kahteen ensimmäiseen harjoitukseen välimuoto, jossa havainnollistat, miten lasku etenee. Voit vielä kirjoittamalla selittää, mitä olet tehnyt.

a) $1\frac{5}{8} = \frac{}{\dots\dots} = \frac{}{8}$ b) $2\frac{5}{6} = \frac{}{\dots\dots} = \frac{}{}$

c) $3\frac{1}{9} = \frac{}{}$ d) $5\frac{7}{8} = \frac{}{}$ e) $9\frac{4}{7} = \frac{}{}$ f) $12\frac{9}{10} = \frac{}{}$

Malli: Kirjoitetaan kaksi murtolukua, jotka ovat lukujen $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{2}$ välissä.

Lavennetaan molemmat luvut niin, että saadaan yhteinen nimittäjä. Etsitään isoa yhteistä nimittäjää, joka on vaikka 30. Lavennetaan ensimmäinen luku kymmenellä ja toinen luku viidellätoista.

Saadaan $\frac{10}{30}$ ja $\frac{15}{30}$

Välissä olevia murtolukuja ovat $\frac{11}{30}$ ja $\frac{14}{30}$ supistettuina $\frac{11}{30}$ ja $\frac{7}{15}$

Harjoitus 6

Kirjoita kaksi murtolukua, jotka ovat lukujen $\frac{1}{7}$ ja $\frac{2}{8}$ välissä.

Harjoitus 7

Kirjoita kaksi murtolukua, jotka ovat lukujen $\frac{9}{11}$ ja $\frac{10}{11}$ välissä.

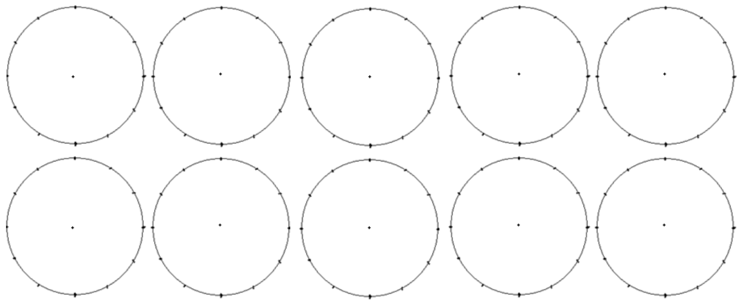
Harjoitus 8

Kirjoita neljä murtolukua, jotka ovat yhtä suuria kuin $\frac{2}{3}$.

Harjoitus 9 **4/IV**

Viisi kaverusta oli ulkoilemassa. He päättivät tilata pitsaa nälän poistamiseksi. Pitseriassa oli kymmenen (10) pitsan tarjous. Kaveriporukka päätti tilata viisi (5) erilaista pitsaa ja jokaista pitsaa kaksi (2) samanlaista.

Pitsapaloja **jäi yli** seuraavasti:
$\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$



Kuinka paljon pitsaa jäi yli kokonaisuudessaan?
(Piirrä, kirjoita ja selitä, miten toimit, jotta voit ratkaista tehtävän.)

Harjoitus 10

Laita vaiheet järjestykseen (kirjoita A-D). Selitä, mitä vaiheissa tapahtuu.
Kerro myös (kirjoita viereen), mikä laskutoimitus on kulloinkin kyseessä.

A) $\frac{15}{7}$

B) $\frac{2 \cdot 7+1}{7}$

C) $2\frac{1}{7}$

D) $\frac{14+1}{7}$

Laskujärjestys on ____ ____ ____ ____

Kirjoita vielä kokonainen lauseke, jossa kaikki vaiheet ovat järjestyksessä matemaattisesti oikein.

____

Harjoitus 11 **5/IV**

Laske. Kirjoita vaiheet näkyviin. Jos haluat, voit myös piirtää ja selittää.

a) $1 - \frac{1}{6} =$

b) $2 + 1\frac{1}{3} =$

Harjoitus 12.

Antenni maksoi ensin 30 €. Asiakas valitti myyjälle antennin kalleutta ja myyjä kiusallaan korotti hintaa $\frac{1}{6}$. Asiakas hermostui myyjän niskuroinnista ja ilmaisi tyytymättömyyttään. Myyjä päätti asiakkaan harmiksi korottaa antennin hintaa vielä $\frac{1}{7}$ lisää. Koska asiakas tarvitsi antennin kipeästi tulevien maailman mestaruuskilpailujen takia, hän osti antennin.

Kuinka paljon asiakas joutui maksamaan?

Harjoitus 13 **6/IV**

Vertaile. Käytä tyhjää tilaa laskemiseen.

a) Kumpi on pienempi? $\frac{9}{10}$ vai $\frac{8}{9}$ Perustele.

b) Kumpi on suurempi? $\frac{7}{15}$ vai $\frac{4}{7}$ Perustele.

Harjoitus 14.

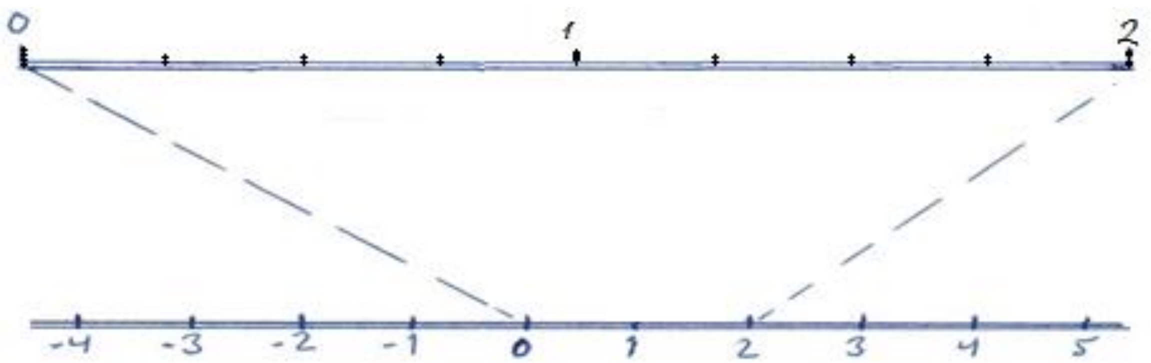
Murtoluvun $\frac{2}{5}$ sekä osoittajaa ja nimittäjää kasvatetaan yhdellä.
Kuinka paljon murtoluku kasvaa?

____

____

Harjoitus 15.

Merkitse lukusuoralle mahdollisimman tarkasti luvut $\frac{8}{10}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{43}{20}$, $\frac{10}{13}$, $\frac{11}{9}$ ja $\frac{2}{5}$.



Kirjoita luvut suuruusjärjestyksessä (Käytä merkkejä < ja >)

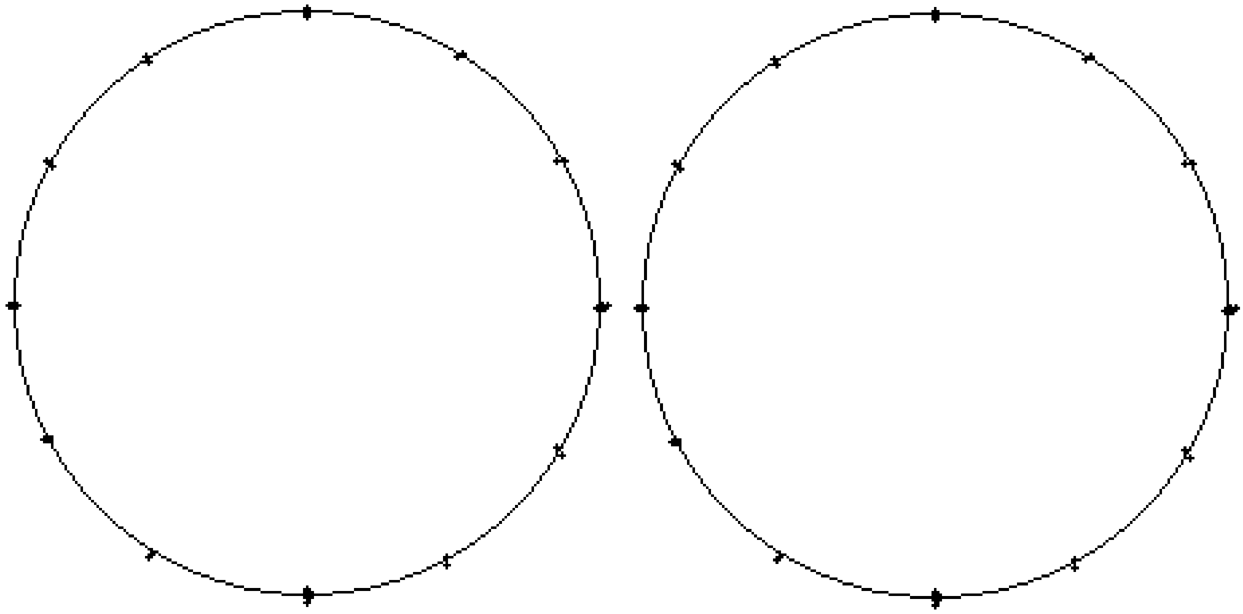
____

Harjoitus 16 **7/IV**

Aseta murtoluvut $\frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{17}{20}, \frac{3}{5}$ suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan.
Tee viivasta lukusuora ja kirjoita luvut lukusuoralle niin tarkasti kuin pystyt.
Käytä tyhjää tilaa lukujen muokkaamiseen.

Harjoitus 17

Järjestä murtoluvut $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6}$ pienimmästä suurimpaan.
Merkitse luvut lukusuoralle niin tarkasti kuin pystyt.
Käytä tyhjää tilaa lukujen muokkaamiseen.



KUVIO 1